Druckanstieg im Inneren von Gebäuden bei Windeinfall

Von **G.-A. Euteneuer**, Karlsruhe

DK 624.042.41 : 533.6.011

Sind bei einem allseitig geschlossenen Bauwerk Öffnungen auf der windzugewandten Seite frei, so erhöht sich bei einem plötzlichen Windeinfall der Luftdruck innerhalb des Gebäudes, wodurch sich eine zusätzliche Belastung der Außenhaut, insbesondere des Daches, ergibt.

Es werden nachfolgende Bezeichnungen gewählt:

c	Schallgeschwindigkeit
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck
c_v	spezifische Wärme bei konstantem Volumen
F	Fläche der Öffnung des Baukörpers auf der windzugewandten Seite
$M = v_\infty / c_\infty$	Machzahl
m	Molekulargewicht
p	Druck
R	universelle Gaskonstante
T	Temperatur
t	Zeit
u	Strömungsgeschwindigkeit in F
V	Innenvolumen des Baukörpers
v	Windgeschwindigkeit
ε	gegenüber der Einheit kleine Größe
$K = c_p/c_v$	Verhältnis der spezifischen Wärmen
ϱ	Dichte
$\tau = \sqrt{\frac{K}{2}} \cdot \frac{F c_0}{V} t$	dimensionslose Zeit

Indices

a	Anfangszustand
o	Ruhegröße
∞	weit stromauf vor dem Bauwerk

Im folgenden soll abgeschätzt werden, wie schnell sich zeitlich gesehen dieser erhöhte Innendruck $p = p(t)$ aufbaut bei vorgegebener Geschwindigkeit v_∞ des plötzlich einfallenden Windes, vorgegebenem Innenvolumen V des Gebäudes und vorgegebener Öffnungsfläche F auf seiner windzugewandten Seite.

Das dazu notwendige Rechenmodell zeigt Abb. 1.

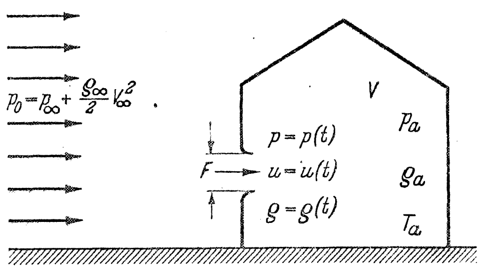

Abb. 1. Rechenmodell

Im Gebäude stehe die Luft vor Beginn des Vorganges unter dem Druck p_a, ihre Temperatur sei T_a und dementsprechend ihre Dichte ϱ_a, die sich ja aus der Zustands-Gleichung der idealen Gase

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{R}{m} T \qquad (1)$$

ergibt, wobei R die universelle Gaskonstante und m das Molekulargewicht des Gases, also hier der Luft, ist.

Fällt jetzt plötzlich bei äußerem Luftdruck p_∞ Wind mit der Geschwindigkeit v_∞ ein, so bildet sich vor der windzugewandten Fläche ein Aufstau auf in Höhe von

$$p_0 = p_\infty + \frac{\varrho_\infty}{2} v_\infty^2 \, {}^{*}. \qquad (2)$$

Dabei ist angenommen, daß die Summe der geöffneten Flächen klein ist gegenüber der gesamten dem Winde zugewandten Wandfläche.

Unter der Wirkung dieses Aufstaus beginnt nun Luft durch die Öffnung F in das Innere des Gebäudes zu fließen mit der Geschwindigkeit $u = u(t)$. Durch diesen Massenzustrom an Luft erhöht sich der Druck im Inneren des Gebäudes, die treibende Druckdifferenz wird geringer und damit auch die Geschwindigkeit u. Dieser Vorgang hält, immer langsamer werdend, so lange an, bis der Innendruck demjenigen des Aufstaus vor der Außenwand gleich geworden ist.** Damit sind neben der Geschwindigkeit u der Druck $p = p(t)$, die Dichte $\varrho = \varrho(t)$ und die statische Temperatur $T = T(t)$ abhängig von der verstrichenen Zeit, es liegt also das Problem einer instationären Strömung vor. Dieses Problem tritt auch bei Leckstellen an Flugzeugzellen auf. Es soll hier überdacht werden mit dem Ziel, für kleine Druckdifferenzen, wie sie bei Windeinfall in der Gebäude-Aerodynamik vorkommen, handliche Formeln für den ingenieurmäßigen Gebrauch zu ermitteln.

Die Luft wird im folgenden als ein Gas konstanter spezifischer Wärme angesehen, was sicher berechtigt ist. Der Einströmvorgang erfolge verlustfrei.

Bei diesem Problem treten vier unbekannte Größen, die ihrerseits von der Zeit t abhängen, nämlich u, p, ϱ und T, auf. Zu ihrer Berechnung benötigt man dementsprechend vier Gleichungen, und zwar die

1. Massenerhaltung,
2. Energieerhaltung,
3. Zustands-Gleichung (1) und die
4. Isentropen-Relation, da der Vorgang der Beschleunigung der Luft aus der Ruhe von p_0 auf die Geschwindigkeit $u(t)$ bei einem Druck $p(t)$ verlustlos erfolgt.

Der Satz der Erhaltung der Masse besagt, daß der Massenzuwachs an Luft im Inneren des Gebäudes gedeckt werden muß durch den Zufluß, also mathematisch formuliert

$$V(\varrho - \varrho_a) = F \int_0^t \varrho\, u\, dt. \qquad (3a)$$

Differentiation nach der Zeit t ergibt, wenn V auf die andere Seite geschafft wird

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{F}{V} \varrho\, u. \qquad (3b)$$

Die Isentropen-Beziehung lautet

$$\frac{p}{\varrho^K} = \frac{p_0}{\varrho_0^K}, \qquad (4)$$

* Genauer ist $\dfrac{p_0}{\varrho_0} = \dfrac{p_\infty}{\varrho_\infty} + \dfrac{K-1}{2K} v_\infty^2$.

Da aber $\dfrac{\varrho_\infty}{2} v_\infty^2 \ll p_\infty \approx p_0$

ist, gibt Gl. (2), die aus einem Grenzübergang $K \to \infty$ für Strömungen inkompressibler Medien gewonnen wird, hier die Verhältnisse genügend genau wieder.

** Bei genauerer Betrachtung handelt es sich hierbei um einen Schwingungsvorgang, weil infolge der Massenträgheit der einströmenden Luft der Luftdruck im Gebäude den Wert p_0 überschreitet, wobei dann wieder Ausströmen von Luft aus dem Gebäude, verbunden mit Druckabsenkung, erfolgt, usw. Dieser Effekt sei aber hier vernachlässigt.

mit K als dem Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen.

Schreibt man die linke Seite von Gl. (3 b) um gemäß

$$\frac{d\varrho}{dt}=\frac{d\varrho}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}, \tag{3c}$$

so erhält man über Gl. (4) anstelle von (3 b) den Zusammenhang

$$\frac{dp}{dt}=K\frac{p_o^{1/K}}{\varrho_o}\,p^{\frac{K-1}{K}}\,\frac{F}{V}\,\varrho\,u. \tag{5a}$$

Eliminiert man hier ϱ über Gl. (4), so erhält man

$$\frac{dp}{dt}=K\frac{F}{V}\,p\,u. \tag{5b}$$

Aus dem Energiegesetz, angewendet auf das Einströmen in die Fläche F, folgt über

$$\frac{K}{K-1}\cdot\frac{p_o}{\varrho_o}=\frac{K}{K-1}\cdot\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}u^2 \tag{6a}$$

unter Elimination von ϱ über Gl. (4)

$$u=\sqrt{\frac{2K}{K-1}\cdot\frac{p_o}{\varrho_o}\left[1-\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{K-1}{K}}\right]}. \tag{6b}$$

Damit wird aus Gl. (5 b)

$$\frac{dp}{dt}=K\,p\,\frac{F}{V}\sqrt{\frac{2K}{K-1}\cdot\frac{p_o}{\varrho_o}\left[1-\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{K-1}{K}}\right]}. \tag{7}$$

Macht man das links stehende Differential dp noch durch p_o dimensionslos, so erhält man nach Trennung der Veränderlichen

$$\frac{d\left(\frac{p}{p_o}\right)}{\frac{p}{p_o}\sqrt{1-\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{K-1}{K}}}}=K\frac{F}{V}\sqrt{\frac{2}{K-1}K\frac{p_o}{\varrho_o}}\,dt. \tag{8}$$

Ebenfalls aus dem Energiesatz folgt [1]

$$K\frac{p_o}{\varrho_o}=c_o^2, \tag{9}$$

wobei c_o die Ruheschallgeschwindigkeit ist. Trägt man Gl. (9) in Gl. (8) ein und integriert, so erhält man

$$\int\limits_{p_a/p_o}^{p/p_o}\frac{d\left(\frac{p}{p_o}\right)}{\sqrt{\left(\frac{p}{p_o}\right)^2-\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{3K-1}{K}}}}=\sqrt{\frac{2K^2}{K-1}}\cdot\frac{F\,c_o}{V}\,t. \tag{10}$$

Bis hierher verlief die Rechnung streng im Sinne der Stromfadentheorie der Strömungen kompressibler Medien. Da sich das so erhaltene Integral geschlossen nicht lösen läßt, ist es notwendig, sinnvolle Vereinfachungen einzuführen, die eine geschlossene Lösung gestatten.

Hier sei daran erinnert, daß sich im speziellen Falle der Gebäude-Aerodynamik p_o und p_∞ bzw. p im wesentlichen unterscheiden nur um den Staudruck $(\varrho_\infty/2)\,v_\infty^2$ des einfallenden Windes. Größenordnungsmäßig ist in etwa

$$p=p_o-\frac{\varrho_\infty}{2}v_\infty^2 \tag{11a}$$

bzw.

$$\frac{p}{p_o}=1-\frac{\frac{\varrho_\infty}{2}v_\infty^2}{p_o}. \tag{11b}$$

So beträgt z. B. bei einer Windgeschwindigkeit $v_\infty = 40$ m/s entsprechend 144 km/h der zugehörige Staudruck $(\varrho_\infty/2)\,v_\infty = 100$ kp/m². Der Ruhedruck p_o, der dem Barometerstand b_o entspricht, ist wesentlich höher, $b_o = 750$ mm Hg z. B. bedeutet $p_o = 10\,200$ kp/m². Daher ist sicher bei diesen Aufgabestellungen immer $((\varrho_\infty/2)\,v_\infty^2/p_o$ eine kleine Größe und man kann Gl. (11 b) ersetzen durch

$$\frac{p}{p_o}=1-\varepsilon \tag{11c}$$

mit der Forderung $\varepsilon \ll 1$. Trägt man dieses Ergebnis in Gl. (10) ein unter Beachtung der Randbedingungen, so erhält man

$$(-1)\int\limits_{\varepsilon_a}^{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{\sqrt{(1-\varepsilon)^2-(1-\varepsilon)^{\left(3-\frac{1}{K}\right)}}}=\sqrt{\frac{2K^2}{K-1}}\cdot\frac{F\,c_o}{V}\,t. \tag{12}$$

Entwickelt man im Nenner der linken Seite der Gl. (12) nach ε unter Vernachlässigung der Glieder quadratischer Ordnung, so erhält man

$$-\int\limits_{\varepsilon_a}^{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}=\sqrt{2K}\,\frac{F\,c_o}{V}\,t. \tag{13}$$

Die Integration der linken Seite liefert unter Einsetzung der Integrations-Grenzen

$$-2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{\varepsilon_a}=\sqrt{2K}\,\frac{F\,c_o}{V}\,t \tag{14a}$$

bzw. nach Umordnung

$$\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\varepsilon_a}-\sqrt{\frac{K}{2}}\cdot\frac{F\,c_o}{V}\,t. \tag{14b}$$

Führt man die dimensionslose Zeit

$$\tau=\sqrt{\frac{K}{2}}\cdot\frac{F\,c_o}{V}\,t \tag{15}$$

ein und resubstituiert ε gemäß Beziehung (11 c), so ergibt sich

$$\sqrt{1-\frac{p}{p_o}}=\sqrt{1-\frac{p_a}{p_o}}-\tau \tag{16a}$$

bzw. aufgelöst nach p/p_o

$$\frac{p}{p_o}=\frac{p_a}{p_o}+2\sqrt{1-\frac{p_a}{p_o}}\,\tau-\tau^2, \tag{16b}$$

also eine quadratische Abhängigkeit von der dimensionslosen Zeit τ. Da die Glieder mit τ und τ^2 verschiedene Vorzeichen haben, muß die Funktion p/p_o einen Extremwert besitzen. Er ergibt sich über

$$\frac{d\left(\frac{p}{p_o}\right)}{d\tau}=0=2\sqrt{1-\frac{p_a}{p_o}}-2\,\tau_{\max} \tag{17a}$$

zu

$$\tau_{\max}=\sqrt{1-\frac{p_a}{p_o}}. \tag{17b}$$

Führt man diese Beziehung in Gl. (16 b) ein, so erhält man für den Enddruck im Gebäude $p/p_o = 1$, d. h. der volle Staudruck des Windes kommt zum Tragen.

Resubstituiert man in Gl. (17 b) $\tau_{\max}$ gemäß Gl. (19), so erhält man endgültig

$$t_{\max} = \sqrt{\frac{2}{K}} \cdot \frac{V}{F\,c_o} \sqrt{1-\frac{p_a}{p_o}}. \tag{17c}$$

Die Zeit $t_{\max}$ zur Erreichung des Endzustandes ist also um so größer, je größer der umbaute Raum V des Gebäudes und je kleiner das Ausgangs-Druckverhältnis p_a/p_o ist. Sie wird um so geringer, je größer der dem Winde geöffnete freie Querschnitt F ist. Die Ruheschallgeschwindigkeit $c_o \approx 340$ m/s für Luft ist im wesentlichen eine Konstante. Sie schwankt wegen

$$c_o = \sqrt{K\frac{p_o}{\varrho_o}} = \sqrt{K\frac{R}{m}T_o} \tag{18}$$

je nach Außenluft-Temperatur T_o um einen Faktor 1,15 bis 0,94, je nachdem, ob man Verhältnisse in den Tropen oder an den Polen betrachtet.

Als Beispiel sei ein kubusförmiges Bauwerk gemäß Abb. 2 betrachtet.

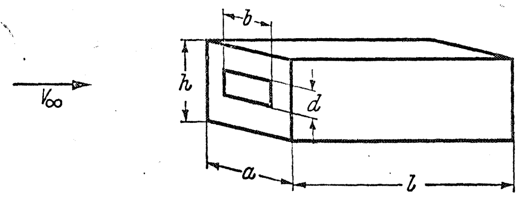

Abb. 2. Beispiel eines Bauwerkes

Das Innenvolumen V des Baukörpers ist hier

$$V = a\,l\,h. \tag{19}$$

Die einzige Öffnung befinde sich, wie eingezeichnet, in der dem Wind zugewandten Wand und habe die Größe

$$F = b\,d. \tag{20}$$

Das Druck-Verhältnis p_a/p_o betrage 0,99.

Nimmt man einmal beispielhaft an, daß $a = h = 10$ m, $l = 20$ m und $b = d = 1$ m sei, so liefert mit $K = 1{,}4$ und $c_o = 340$ m/s die Gl. (17 c) für die Zeit bis zum vollen Druckanstieg

$$t_{\max} = 1{,}2\,\frac{2000}{1340}\,0{,}01 = 0{,}702 \text{ s}$$

Handelt es sich um ein sehr lang gestrecktes bzw. sehr hohes Gebäude, so ist zu beachten, daß dann dadurch, daß die Druckwelle im Gebäude mit Schallgeschwindigkeit voranschreitet, eine wesentliche Voraussetzung der vorher mitgeteilten Rechnung verletzt ist, nämlich die, daß der Druck im Gebäude zwar zeitabhängig ist, aber zu jedem Zeitpunkt innerhalb des Gebäudes als konstant angesehen wird.* Die Rechnung versagt also, wenn

$$l > c_o\,t_{\max} \tag{21a}$$

ist, bzw. umgekehrt formuliert sind die Ergebnisse zutreffend, wenn

$$l < c_o\,t_{\max} \tag{21b}$$

ist, wobei l die größte gestreckte Länge im Gebäudeinneren von der Öffnung bis zu einer Wand ist.

Führt man die Gl. (17 c) in Gl. (21 b) ein, so erhält man als Abschätzung für den Gültigkeitsbereich der Rechnung

$$\frac{l\,F}{V} < \sqrt{\frac{2}{K}\left(1-\frac{p_a}{p_o}\right)}. \tag{22}$$

Beachtet man hier, daß $p_a \approx p_\infty$ ist, so erhält man mit Gl. (2) aus Gl. (22) näherungsweise

$$\frac{l\,F}{V} < \sqrt{\frac{2}{K}\cdot\frac{\varrho_\infty v_\infty^2}{2\,p_o}} = \sqrt{\frac{v_\infty^2}{K\frac{p_\infty}{\varrho_\infty}}} = \sqrt{\frac{v_\infty^2}{c_\infty^2}} = \frac{v_\infty}{c_\infty} = M_\infty, \tag{23}$$

wobei M_∞ die Anström-Machzahl der Windbö ist.

Zusammenfassend muß also die Bedingung

$$M_\infty\,\frac{V}{F\,l} > l \tag{24}$$

erfüllt sein, damit die Rechnung richtige Resultate liefert. Insgesamt gesehen ist die Zeit $t_{\max}$ außerordentlich kurz, so daß praktisch der gesamte Staudruck des Windes als innerer Überdruck bei der statischen Berechnung mit berücksichtigt werden müßte, wenn das Gebäude bis auf die eine Öffnung F hermetisch geschlossen wäre, wie das z. B. bei vollklimatisierten Gebäuden, Futtersilos usw. der Fall sein kann.

Bei allen übrigen Bauwerken finden sich immer auch Öffnungen F' in den Wänden der windabgewandten Seite, seien es offene oder schlecht schließende Tore, Türen, Fenster oder auch je nach Baumaterial die nicht zu übersehende Porosität des Mauerwerkes bzw. des Holzes bei Holzbauweise. Da auf der windabgewandten Seite in dem Totwasser des Gebäudes ein Unterdruck in der Größenordnung des Staudruckes herrscht, strömt wiederum Luft aus dem Gebäude heraus in das Totwasser hinein, wodurch der im Gebäude entstehende Überdruck teilweise wieder abgebaut wird.

Ist im Sonderfalle $F' > F$, so kann im Bauwerk auch Unterdruck auftreten, wodurch die Windbelastung an den von außen mit Unterdruck beaufschlagten Flächen insgesamt herabgesetzt wird.

Als Grundlagen für sinnvolle Normungen wären hier weitere Untersuchungen notwendig über folgende Punkte:

1. Druck-Verteilungen an charakteristischen Bauwerkformen (im Windkanal zu messen bzw. aus vorhandener Literatur zu sammeln).

2. Einfluß der Bodengrenzschicht auf die Druck-Verteilung (theoretisch, und experimentell simuliert im Windkanal).

3. Druckverluste beim Ein- und Ausströmvorgang. Diese treten sicher auf und erhöhen die Zeit $t_{\max}$ bis zum Druckausgleich (theoretisch).

4. Porosität und dimensionsloser Druckabfall bei der Durchströmung von Mauer- bzw. Holzwerk (experimentell mittels einer kleinen ventilatorbetriebenen Meßstrecke, bzw. aus vorhandener Literatur zu sammeln).

Nach genügender Abklärung dieser Punkte ist zu hoffen, daß man auch auf theoretischem Wege Vorschläge für eine weitere sinnvolle Normung der Lastannahme bei Windeinfall unterbreiten kann.

Literatur

1. J. Zierep: Vorlesungen über theoretische Gasdynamik. 1962, S. 39, Gl. (3.4). Karlsruhe: Verlag G. Braun.

* Diesen Hinweis verdankt der Verfasser Herrn Prof. Dr.-Ing. Zierep.