

【論文】
UDC : 628.86 : 517.9

一般曲線座標系による室内気流数値シミュレーション その1

— $k-\epsilon$ モデルと境界条件式の2次元一般曲線座標系への変換—

正会員 村上 周 三*
正会員 加藤 信 介**
正会員 石田 義 洋***

定が複雑となり種々の困難に直面する。

本研究では、第一段階として $k-\epsilon$ モデルにより、2次元室内気流の一般曲線座標系による解析法を検討する。

本報では $k-\epsilon$ モデルの一般曲線座標系への変換、コントロールボリューム法による支配方程式の定式化について報告し、一般曲線座標系に対応して、指数則、freeslip等の境界条件について、任意形状の境界に適合可能な境界条件式を提案する。

本研究では、特に、圧力に関するポアソン方程式に求められる圧力の2階微分を保存的に定式化したこと、およびポアソン方程式に対して、境界上の圧力も未知数とした定式化を行ったことを特徴としている。これにより境界に隣接するコントロールボリュームにおいても流量収支を十分に満足する解を得ることを可能とした。

本報では、主に定式化について述べ、計算への適用は次報で述べる。

記号

- x, y : 物理座標
- ξ, η : 計算座標
- u, v : x, y 方向の速度
- U, V : u, v の反変ベクトル
- p : 圧力 (静圧と $2/3 k$ の和を密度で割った値)
- k : 乱流エネルギー
- ϵ : エネルギー散逸
- ν_t : 渦動粘性係数

添字

- \square_{ij} : $\xi=i, \eta=j$ の節点における離散値
- \square^n : 時間ステップ n の値
- \square' : 緩和計算のイテレーション回数
- $\square_x, \square_y, \square_t$: x, y, t による偏微分
- $\square_\xi, \square_\eta$: ξ, η による偏微分
- \square^t : 接線方向成分
- \square^x, \square^y : x, y 方向成分
- (\square, \square) : ベクトル量を示す

前方模型の影響は小さくなる。

3. 壁面風圧減少率は前方模型と対象模型により形成される空間のアスペクト比が0.6~0.8付近で最大値を示し、アスペクト比6以上では略零となる。

4. 対象模型の測定点と前方模型高さの相対的な位置関係が1以上となると壁面風圧減少率は減少し、前方模型より高い測定点では前方模型の影響が小さくなる。

参考文献

- 1) A. F. E. Wise : Effects due to groups of buildings Phil. Trans. Roy. Soc. 269, pp469-485(1971)
- 2) R. E. BRITTER & J. C. R. HUNT : VELOCITY MEASUREMENTS AND ORDER OF MAGNITUDE ESTIMATES OF THE FLOW BETWEEN TWO BUILDING IN SIMULATED ATMOSPHERIC BOUNDARY LAYER
Journal of Industrial Aerodynamics, 4(1979) pp. 165-182
- 3) 勝田高司・村上周三・上原 清・小峰裕己 : 街区に建つ高層建築物周辺の気流分布に関する風洞実験 - 建物周辺気流に関する実験的研究 (IX) - 日本建築学会論文報告集, 第256号, pp. 67-77, 昭和56年6月
- 4) 勝田高司・後藤 滋 : 建物周囲条件の換気通風に及ぼす影響, 日本建築学会論文報告集, 第53号, pp. 80-87, 昭和31年6月
- 5) B. E. LEE, M. HUSSAIN, B. SOILMAN : PREDICT-

ING NATURAL VENTILATION FORCES UPON LOWRISE BUILDING

ASHRAE JOURNAL February 1980 pp. 35-39

- 6) 石井米三郎・西田 勝・片山忠久・石井昭夫・堤純一郎 : 住宅配置計画が換気通風に及ぼす影響に関する風洞実験, 日本建築学会中国・九州支部研究報告, 第7号, pp. 61-64, 昭和62年3月,

本論文に関連する既発表論文

- 7) 清田誠良・関根 毅 : 市街地風の乱流構造と換気に関する研究その3
一直列配置模型の壁面風圧性状について - 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), 昭和59年10月
- 8) 清田誠良・関根 毅 : 建築物の相互干渉が建築物壁面風圧に及ぼす影響に関する実験的研究, 日本建築学会中国・九州支部研究報告, 第7号, pp. 57-61, 昭和62年3月

注

- 1) 前方模型高さと模型間隔の比を本論文においては空間アスペクト比と定義する。
- 2) 乱れの強さは各測定点における気流速度の標準偏差を各測定点の平均気流速度で除したものである。
- 3) 平均気流速度の鉛直分布の対数法則は次式により表される。ただし、 U_* は摩擦速度、 Z_0 は粗度定数を表す。

$$U = \frac{U_*}{k} \ln \frac{Z}{Z_0}$$

SYNOPSIS

UDC : 624.042.41

EXPERIMENTAL STUDY ON INFLUENCE OF INTERACTION OF BUILDINGS ON WALL WIND PRESSURE

Part I Influence of a low model placed upwind of tall model

by NOBUYOSHI KIYOTA and Dr. TAKESHI SEKINE,
Members of A. I. J.

In this paper we describe a wind tunnel investigation into the wall wind pressure on tall model surface when a low model is placed upwind of tall model in a simulated atmospheric boundary layer. Measurements are made of the influence of the height of low model and distance of two models. The results are presented in the form of coefficient of wall wind pressure, normalized by means of dynamic pressure of free stream, and decreased ratio, normalized by means of wall wind pressure of isolated model.

The summary of the results is shown below.

- 1) The influence of low model gets bigger as the height of low model gets higher.
- 2) The influence of low model gets smaller as the distance of two models gets wider.
- 3) The maximum value of decreased ratio appears for value of $d/h=0.6\sim 0.8$.

1. はじめに

差分法等による流れ場の数値解析において、一般曲線座標系を用いれば、領域分割のためのグリッド形状の選択の自由度が著しく向上する。直交座標系は一般曲線座標系の特殊な場合であるから、解析対象の空間形状がさまざまであることを考えれば、グリッド分割という側面において一般曲線座標系が有利であることは否定できない。一般曲線座標系を用いた流れの解析は、航空機工学、機械工学の分野で特に良く用いられている^{1), 2), 3)}。

小林らは、一般曲線座標系による圧力速度同時緩和法を構成し、2次元層流場への適用を報告している。この方法は、圧力をセル中心で定義し、速度を格子点で定義するスタガードグリッド法の一形態である⁴⁾。

武本らは、一般曲線座標系によるレギュラー・グリッド法を用いた2次元、3次元層流解析法を報告している。この解析法では、運動方程式の時間積分に、移流項には Adams-Bashforth 法を用い、拡散項には Clank-Nicholson 法を適用している。ただし、空間微分の離散化においては、必ずしも保存的なスキームを用いていない。また、移流項差分に関する QUICK スキームを、座標変換を行った計算領域において適用して、任意形状のグリッド分割における高精度風上法を可能としている⁵⁾。

建築環境工学の分野でも寺井は曲線座標を基にする層流解析法を提案している⁶⁾。一方、有限要素法を用いた流れの解析では、平岡、石田が MAC 法のアルゴリズムを用いた2次元層流解析を行っている^{5), 6)}。松本はペナルティー有限要素法を用いて3次元 $k-\epsilon$ モデルの乱流解析を行っている⁷⁾。

一般曲線座標系を用いた解析では2方程式モデル等乱れの統計量の輸送方程式を組み込んだ乱流の解析法は1~2例を除いてあまり無い⁸⁾。こうした乱れの統計量を組み込んだ一般曲線座標系による解法は境界条件等の設

* 東京大学生産技術研究所 教授・工博
 ** 東京大学生産技術研究所 助教授・工博
 *** 東京大学生産技術研究所 民間等共同研究員 (鹿島建設 (株))
 (昭和62年8月13日原稿受理)

2. 一般曲線座標系

2-1. 座標変換

物理座標系 (x, y) に対して計算座標系 (ξ, η) を定義して次のような変換を行う (図-1)。

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y) \dots (1)$$

次にヤコビアンを式 (2) で定義すると ξ_x, ξ_y 等は式 (3) の関係で結ばれる。

$$J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^{-1} \dots (2)$$

$$\xi_x = y_\eta / J, \xi_y = -x_\eta / J, \eta_x = -y_\xi / J, \eta_y = x_\xi / J \dots (3)$$

$x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$ は中央差分で計算する。ただし境界面上では、境界面から領域内部方向への微分は片側差分で計算する。 $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ は式 (3) より求まる。

なお $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ は以下の性質を示す。

図-1 に示す $\xi = \text{一定}$ の曲線上における ξ の全微分をとると

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0 \dots (4)$$

となる。ここで (dx, dy) は $\xi = \text{一定}$ の曲線の接線ベクトルであるから、ベクトル (ξ_x, ξ_y) は $\xi = \text{一定}$ の曲線に垂直である。同様にベクトル (η_x, η_y) は $\eta = \text{一定}$ の曲線に垂直である。この性質は後で述べる反変ベクトルの物理的意味を考える場合、あるいは境界条件の設定の際に特に有効である。

一般曲線座標系は任意のグリッド分割が可能であるが、 (x, y) 系と (ξ, η) 系の 1:1 の変換は、 ξ と η が (x, y) の一価関数であり、かつ $J \neq 0$ であることが、必要十分条件となる。

節点 (i, j) において、式 (2) を離散表示して $J = 0$ とおくと式 (5) となる。

$$J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = (x_{i+1/2, j} - x_{i-1/2, j})(y_{i, j+1/2} - y_{i, j-1/2}) - (x_{i+1/2, j-1/2} - x_{i-1/2, j-1/2})(y_{i+1/2, j} - y_{i-1/2, j}) = 0 \dots (5)$$

これを書きなおすと、式 (6) となる。

$$(y_{i, j+1/2} - y_{i, j-1/2}) / (x_{i+1/2, j} - x_{i-1/2, j}) = (y_{i+1/2, j} - y_{i-1/2, j}) / (x_{i+1/2, j-1/2} - x_{i-1/2, j-1/2}) \dots (6)$$

ただし、 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ とした。以下同様とする。

式 (6) は点 (i, j) で交わる $\xi = \text{一定}$ 曲線と $\eta = \text{一定}$ 曲線上の 4 点 $(i \pm 1/2, j), (i, j \pm 1/2)$ が一直線上にあるため

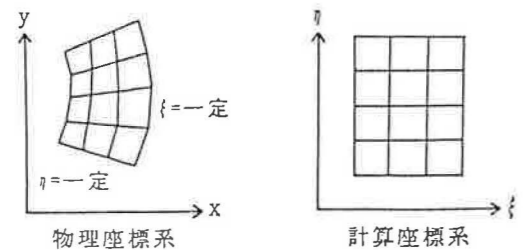


図-1 座標変換

の必要十分条件である⁽¹⁾。すなわち (x, y) 系と (ξ, η) 系の 1:1 の変換を保証するためには $\xi = \text{一定}$ 曲線と $\eta = \text{一定}$ 曲線が、その交点近傍で一直線上ないことを保証する必要がある。特に領域境界線の交点 (例えば節点 $(1, 1)$ など) で注意を払う必要がある。また、隣接する二つの $\xi = \text{一定}$ 曲線あるいは $\eta = \text{一定}$ 曲線が交差する場合は、 ξ あるいは η が (x, y) の一価関数という条件を満たさないから、当然、これも避けねばならない。

2-2. 微分と積分の一般曲線座標系への変換

p_x, p_y のような偏微分は差分化した際の保存性を保証するため次式を採用する。

$$p_x = \xi_x p_\xi + \eta_x p_\eta = [J\xi_x p_\xi + J\eta_x p_\eta] / J = [y_\eta p_\xi - y_\xi p_\eta] / J = [y_\eta p_\xi + y_{\xi\eta} p - y_{\xi\eta} p - y_\xi p_\eta] / J = [(y_\eta p)_\xi - (y_\xi p)_\eta] / J = [(J\xi_x p)_\xi + (J\eta_x p)_\eta] / J \dots (7)$$

$$p_y = \xi_y p_\xi + \eta_y p_\eta = [(J\xi_y p)_\xi + (J\eta_y p)_\eta] / J \dots (8)$$

積分は、函数 $f(x, y) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ に対して

$$\int_V f(x, y) dV = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x, y) dx dy = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) J d\xi d\eta \dots (9)$$

となる。

3. 支配方程式の変換

連続式を変換すると式 (10) となる。

$$u_x + v_y = [J(\xi_x u + \xi_y v)]_\xi + [J(\eta_x u + \eta_y v)]_\eta = 0 \dots (10)$$

ここで、 u, v の反変ベクトルを次式で定義する。

$$U = \xi_x u + \xi_y v, V = \eta_x u + \eta_y v \dots (11)$$

式 (11) から分かるように、 U はベクトル (ξ_x, ξ_y) とベクトル (u, v) の内積である。よって、反変ベクトル U は物理空間における速度 (u, v) の $\xi = \text{一定}$ 曲線と直交する方向成分に比例する。同様に、 V は速度 (u, v) の $\eta = \text{一定}$ 曲線と直交する方向成分に比例している。

運動方程式 (12), (13) は式 (14), (15) のように変換される。

$$u_\xi + (uu)_\xi + (uv)_\eta = -p_x + [2\nu_x u_x]_\xi + [\nu(u_y + v_x)]_\eta \dots (12)$$

$$v_\xi + (uv)_\xi + (vv)_\eta = -p_y + [\nu(u_y + v_x)]_\xi + [2\nu_y v_y]_\eta \dots (13)$$

$$Ju_\xi + (JUu)_\xi + (JVu)_\eta = -(J\xi_x p)_\xi - (J\eta_x p)_\eta + [J\nu_x(2\xi_x^2 + \xi_y^2)u_\xi + 2\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y]u_\eta + \xi_x \xi_y v_\xi + \xi_y \eta_x v_\eta + [J\nu_x(2\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y)u_\xi + (2\eta_x^2 + \eta_y^2)u_\eta + \eta_y \xi_x v_\xi + \eta_x \eta_y v_\eta]_\eta \dots (14)$$

$$Jv_\xi + (JVv)_\xi + (JVv)_\eta = -(J\xi_y p)_\xi - (J\eta_y p)_\eta + [J\nu_x(\xi_x^2 + 2\xi_y^2)v_\xi + (\xi_x \eta_x + 2\xi_y \eta_y)v_\eta + \xi_x \xi_y u_\xi + \xi_x \eta_y u_\eta]_\xi + [J\nu_x(\eta_x \xi_x + 2\eta_y \xi_y)v_\xi + (\eta_x^2 + 2\eta_y^2)v_\eta + \eta_x \xi_y u_\xi + \eta_x \eta_y u_\eta]_\eta \dots (15)$$

k の輸送方程式 (16) は式 (17) となる。

$$k_\xi + (ku)_\xi + (kv)_\eta = (\nu_x k_x / \sigma_1)_\xi + (\nu_x k_y / \sigma_1)_\eta + \nu_x S - \epsilon \dots (16)$$

$$Jk_\xi + (JUk)_\xi + (JVk)_\eta = [J\nu_x(\xi_x^2 + \xi_y^2)k_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)k_\eta]_\xi + [J\nu_x(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)k_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2)k_\eta]_\eta + J\nu_x S - J\epsilon \dots (17)$$

生産項中の S は式 (18) で計算する。

$$S = 2u_x^2 + 2v_y^2 + (u_y + v_x)^2 = 2[(J\xi_x u)_\xi + (J\eta_x u)_\eta] / J^2 + 2[(J\xi_y v)_\xi + (J\eta_y v)_\eta] / J^2 + [(J\xi_x u + J\xi_y v)_\xi + (J\eta_x u + J\eta_y v)_\eta] / J^2 \dots (18)$$

ϵ の輸送方程式 (19) は式 (20) に変換される。

$$\epsilon_\xi + (\epsilon u)_\xi + (\epsilon v)_\eta = (\nu_x \epsilon_x / \sigma_2)_\xi + (\nu_x \epsilon_y / \sigma_2)_\eta + c_1 \epsilon \nu_x S / k - c_2 \epsilon^2 / k \dots (19)$$

$$J\epsilon_\xi + (JU\epsilon)_\xi + (JV\epsilon)_\eta = [J\nu_x(\xi_x^2 + \xi_y^2)\epsilon_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)\epsilon_\eta]_\xi + [J\nu_x(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)\epsilon_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2)\epsilon_\eta]_\eta + Jc_1 \epsilon \nu_x S / k - Jc_2 \epsilon^2 / k \dots (20)$$

ただし、 $\nu_x = c_0 k^2 / \epsilon$ $\dots (21)$

モデルの定数は以下の値を使用する。

$$\sigma_1 = 1.0, \sigma_2 = 1.3, c_0 = 0.09, c_1 = 1.44, c_2 = 1.92$$

4. 離散化

4-1. コントロールボリューム法による離散化

本研究では、速度と圧力の定義点を同一とするレギュラーグリッドを用いる⁽³⁾、図-2 に示す節点において u, v, p を定義し、節点の間を通る界面に囲まれたコントロールボリュームで各支配方程式を積分する。支配方程式中の移流項、拡散項はすべて (ξ, η) 系において保存的に表されており、それぞれ ξ に関する偏微分と η に関する偏微分の和として、式 (22) のようにまとめられる。この積分は有限なコントロールボリュームへの Flux の合計を評価するものであり、式 (23) で近似する。

$$F = (A_\xi + B_\eta) / J \dots (22)$$

$$\int_V F dV = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} F J d\xi d\eta = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} (A_\xi + B_\eta) d\xi d\eta = \int_{j-1/2}^{j+1/2} [A(i+1/2, \eta) - A(i-1/2, \eta)] d\eta + \int_{i-1/2}^{i+1/2} [B(\xi, j+1/2) - B(\xi, j-1/2)] d\xi = A(i+1/2, j) - A(i-1/2, j) + B(i, j+1/2) - B(i, j-1/2) \dots (23)$$

すなわち、コントロールボリュームの界面上の積分値は、界面上の代表点の値と界面の幅の積に等しいと考え、さらに代表点は節点間の中点 $(i \pm 1/2, j)$ 等 (図-2, 3 の○印) とし、これらの点の値は節点 (i, j) 等の値から線形補間により求まるものとしている。

図-3 のような境界に接する 1/2 形状のコントロールボリュームでは

$$\int_V F dV = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1/2} F J d\xi d\eta$$

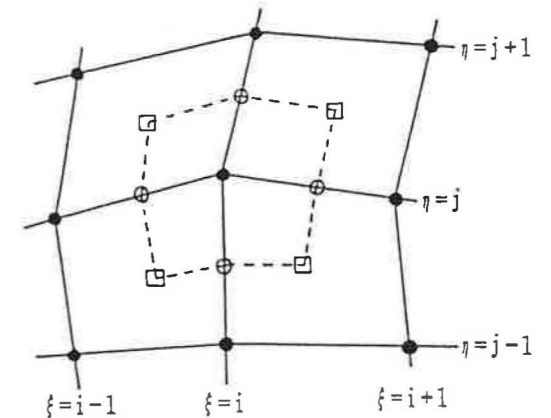


図-2 レギュラーグリッドとコントロールボリューム

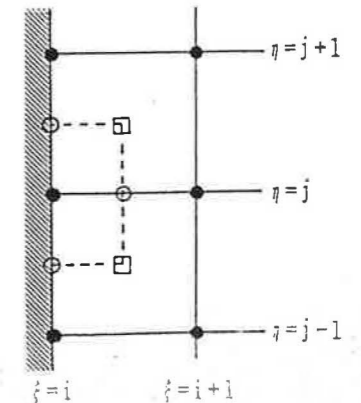


図-3 1/2 形状コントロールボリューム

$$= \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1/2} (A_\xi + B_\eta) d\xi d\eta = \int_{j-1/2}^{j+1/2} [A(i+1/2, \eta) - A(i, \eta)] d\eta + \int_i^{i+1/2} [B(\xi, j+1/2) - B(\xi, j-1/2)] d\xi = A(i+1/2, j) - A(i, j) + [B(i, j+1/2) - B(i, j-1/2)] / 2 \dots (24)$$

となる。1/4 形状のコントロールボリュームについても同様に積分範囲を修正する。

コントロールボリューム法に従い、各支配方程式に式 (23), (24) のような積分を適用すれば、各節点ごとに離散値に対する代数方程式が得られる。

また、 ξ に関する偏微分と η に関する偏微分の和として表示されない項に対する積分は、節点の値で代表させる。例えば生産項 $\nu_x S$ の積分は

$$\int_V \nu_x S dV = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_i^{i+1/2} \nu_x S J d\xi d\eta = (J\nu_x S)_{i,j} \dots (25)$$

となる。

4-2. QUICK スキームの適用

$\bar{v} = v^n + \Delta t \{HY^{n+1/2} + (1-\delta)FY^n\} \dots (74)$
これを式(65), (66)に代入すると式(75), (76)となる。

$$u^{n+1} = \bar{u} + \Delta t \{-p_x^{n+1/2} + \delta FX^{n+1}\} \dots (75)$$

$$v^{n+1} = \bar{v} + \Delta t \{-p_y^{n+1/2} + \delta FY^{n+1}\} \dots (76)$$

連続式

$$u_x^{n+1} + v_y^{n+1} = 0 \dots (77)$$

に式(75), (76)を代入すると、次のポアソン方程式が得られる。

$$p_{xx}^{n+1/2} + p_{yy}^{n+1/2} = (\bar{u}_x + \bar{v}_y)/\Delta t + \delta(FX_x^{n+1} + FY_y^{n+1}) \dots (78)$$

ここで \bar{u}, \bar{v} は既知であるが, FX^{n+1}, FY^{n+1} は未知であるから, 式(78)は運動方程式(75), (76)と連成させて解かねばならない。

6-2. k, ε の輸送方程式

k および ε の輸送方程式は, 時間積分を進める段階で k, ε が負となる状態が発生しやすく, 不安定である。そこで安定性を高めるため, 拡散項等については full-implicit スキームで解を求めることにする。移流項については運動方程式と同様に Adams-Bashforth 法を適用する。

以下に式を示す。

k の輸送方程式

$$(k^{n+1} - k^n)/\Delta t = K^{n+1/2} + |v_x^n k_x^{n+1}/\sigma_{kx} + |v_y^n k_y^{n+1}/\sigma_{ky} + \nu^n S^{n+1} - \epsilon^{n+1} \dots (79)$$

ε の輸送方程式

$$(\epsilon^{n+1} - \epsilon^n)/\Delta t = E^{n+1/2} + |v_x^n \epsilon_x^{n+1}/\sigma_{kx} + |v_y^n \epsilon_y^{n+1}/\sigma_{ky} + c_1 \epsilon^{n+1} \nu^n S^{n+1}/k^{n+1} - c_2 (\epsilon^{n+1})^2/k^{n+1} \dots (80)$$

ただし

$$K^{n+1/2} = -(3/2)(k_x)_x + (k_x)_y^n + (1/2)(k_x)_x + (k_x)_y^{n-1} \dots (81)$$

$$E^{n+1/2} = -(3/2)(\epsilon_x)_x + (\epsilon_x)_y^n + (1/2)(\epsilon_x)_x + (\epsilon_x)_y^{n-1} \dots (82)$$

実際の計算においては, 式(79), (80), (81), (82)は式(17), (20)に示した一般曲線座標系へ変換された式を用いる。

7. 圧力のポアソン方程式

7-1. 定式化

式(78)を(ξ, η)系に変換して, 図-5に示す V₁ のコントロールボリュームで積分すると次式が得られる。

$$-\int_{S_1} J[(\xi_x, \xi_y) \cdot (p_x, p_y)^{n+1/2} - (\bar{u}, \bar{v})/\Delta t - \delta(FX, FY)^{n+1}]d\eta + \int_{S_2} J[(\xi_x, \xi_y) \cdot (p_x, p_y)^{n+1/2} - (\bar{u}, \bar{v})/\Delta t - \delta(FX, FY)^{n+1}]d\eta - \int_{S_3} J[(\eta_x, \eta_y) \cdot (p_x, p_y)^{n+1/2} - (\bar{u}, \bar{v})/\Delta t$$

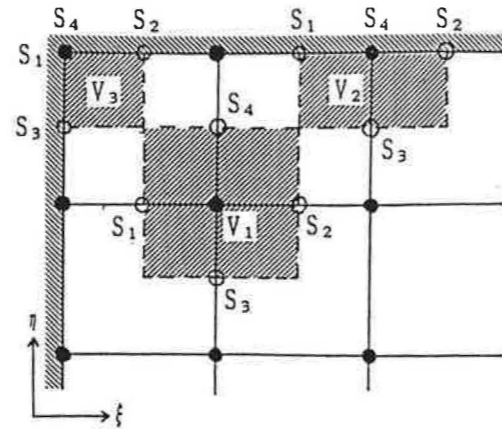


図-5 コントロールボリュームと界面

$$-\delta(FX, FY)^{n+1}]d\xi + \int_{S_4} J[(\eta_x, \eta_y) \cdot (p_x, p_y)^{n+1/2} - (\bar{u}, \bar{v})/\Delta t - \delta(FX, FY)^{n+1}]d\xi = 0 \dots (83)$$

図-5に示す V₂, V₃ のような 1/2 もしくは 1/4 形状のコントロールボリュームでは, 境界と一致する界面がある。このような界面では, 境界の速度が既知であることを利用すれば, 界面上の積分式から圧力が消去される。すなわち, V₂, V₃ における S_i 上での積分は式(75), (76)を考慮すると, 式(84)のように簡単になる。

$$\int_{S_4} J[(\eta_x, \eta_y) \cdot (p_x, p_y)^{n+1/2} - (\bar{u}, \bar{v})/\Delta t - \delta(FX, FY)^{n+1}]d\xi = -\int_{S_4} J[(\eta_x, \eta_y) \cdot (u, v)^{n+1}/\Delta t]d\xi = -\int_{S_4} |Jv^{n+1}/\Delta t|d\xi \dots (84)$$

Vⁿ⁺¹ は速度の反変ベクトル成分で境界面 (ここでは η = 一定) に垂直な成分である。Vⁿ⁺¹ の値は壁であれば 0, 吹き出し口あるいは吸い込み口であれば与えられた条件から算出される。したがって一般にコントロールボリュームの界面が境界に一致する場合は, 速度の境界条件を適用することができる。そこで, 次のような変数を定義する。

$$\begin{aligned} &(\text{界面と境界が一致しない場合}) \\ \bar{U} &= (\xi_x, \xi_y) \cdot (\bar{u}, \bar{v}) + \Delta t \delta(FX, FY)^{n+1}, \\ \bar{V} &= (\eta_x, \eta_y) \cdot (\bar{u}, \bar{v}) + \Delta t \delta(FX, FY)^{n+1} \dots (85) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\text{界面と境界が一致する場合}) \\ \bar{U} &= U, \bar{V} = V : (U, V \text{ は境界条件として与えられる速度の反変ベクトル}) \dots (86) \end{aligned}$$

この \bar{U}, \bar{V} を式(83)に代入すると式(87), (88)が得られる。

$$-L_1 \int_{S_1} J(\xi_x, \xi_y) \cdot (p_x, p_y)^{n+1/2} d\eta + L_2 \int_{S_2} J(\xi_x, \xi_y) \cdot (p_x, p_y)^{n+1/2} d\eta$$

$$-L_3 \int_{S_3} J(\eta_x, \eta_y) \cdot (p_x, p_y)^{n+1/2} d\xi + L_4 \int_{S_4} J(\eta_x, \eta_y) \cdot (p_x, p_y)^{n+1/2} d\xi = \bar{D}/\Delta t \dots (87)$$

$$\begin{aligned} \bar{D} &= -\int_{S_1} |J\bar{U}|d\eta + \int_{S_2} |J\bar{U}|d\eta - \int_{S_3} |J\bar{V}|d\xi \\ &+ \int_{S_4} |J\bar{V}|d\xi \dots (88) \end{aligned}$$

ただし, L_i は界面が境界に一致したときの修正係数であり, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} L_1 &= I_1(I_1 + I_2)/2, L_2 = I_2(I_1 + I_2)/2 \\ L_3 &= I_3(I_1 + I_2)/2, L_4 = I_4(I_1 + I_2)/2 \dots (89) \\ I_i &= 0 : S_i \text{ が境界と一致する場合} \\ &= 1 : S_i \text{ が境界と一致しない場合} \end{aligned}$$

以上から, 式(87)を解いて p^{n+1/2} を求め, これを式(75), (76)に代入して uⁿ⁺¹, vⁿ⁺¹ を求める。この uⁿ⁺¹, vⁿ⁺¹ を式(87)に代入して再び p^{n+1/2} を求める。この手順を繰り返すことにより, ステップ(n+1/2)の圧力とステップ(n+1)の速度を決めることができる。

7-2. 圧力項の離散化

式(87)の圧力項の積分を具体的に表示する。

$$\int_{S_1} J(\xi_x, \xi_y) \cdot (p_x, p_y) d\eta = [J(\xi_x^2 + \xi_y^2) p_x + (\xi_x \xi_y + \xi_y \eta_y) p_y]_{i+1/2} \dots (90)$$

$$\int_{S_2} J(\eta_x, \eta_y) \cdot (p_x, p_y) d\xi = [J(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_x + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_y]_{i+1/2} \dots (91)$$

式(90), (91)は, コントロールボリューム V₁ の界面の中心である (i±1/2, j), または (i, j±1/2) (図-5の□印) において離散化すると式(92), (93), (94), (95)となる。

$$|J(\xi_x^2 + \xi_y^2) p_x|_{i+1/2} = (1/2)[J(\xi_x^2 + \xi_y^2)]_{i,j} + |J(\xi_x^2 + \xi_y^2)|_{i+1/2} (p_{i,j} - p_{i-1,j}) \dots (92)$$

$$|J(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_x|_{i+1/2} = (1/4)[J(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)]_{i,j} (p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) + |J(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)|_{i+1/2} (p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) \dots (93)$$

$$|J(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_x|_{i+1/2} = (1/4)[J(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)]_{i,j+1} (p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) + |J(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)|_{i+1/2} (p_{i+1,j+1} - p_{i-1,j+1}) \dots (94)$$

$$|J(\eta_x^2 + \eta_y^2) p_y|_{i+1/2} = (1/2)[J(\eta_x^2 + \eta_y^2)]_{i,j} + |J(\eta_x^2 + \eta_y^2)|_{i+1/2} (p_{i,j+1} - p_{i,j}) \dots (95)$$

7-3. 連続式の離散化

式(88)に示した \bar{D} はステップ n の連続式の誤差項を含んでおり, これの計算法はステップ(n+1)の連続式の精度に大きな影響を与える。式(88)の界面上の積分値を節点間の中心のみの値で代表すると, 吹き出し口近傍の壁面等, 境界面の速度が急変する位置で, 連続式の誤差が著しく大きくなる。

そこで \bar{D} の計算については, 移流項, 拡散項とは変

えて, 精度を上げた定式化を行う。

コントロールボリュームの界面の \bar{U}, \bar{V} を中点だけでなく各界面の交点 (i±1/2, j±1/2) (図-2, 3の□印) にも代表させて式(88)を積分する。図-2のような領域内部では以下となる。

$$\begin{aligned} \bar{D}_{i,j} &= -\int_{j-1/2}^{j+1/2} (J\bar{U})_{i-1/2,j} d\eta + \int_{j-1/2}^{j+1/2} (J\bar{U})_{i+1/2,j} d\eta \\ &- \int_{i-1/2}^{i+1/2} (J\bar{V})_{i,j-1/2} d\xi + \int_{i-1/2}^{i+1/2} (J\bar{V})_{i,j+1/2} d\xi \dots (96) \end{aligned}$$

これに台形の面積を求める公式を適用して次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{D}_{i,j} &\approx 1/4[U'_{i+1/2,j+1/2} + U'_{i+1/2,j} \\ &+ 1/4[U'_{i+1/2,j} + U'_{i+1/2,j-1/2} \\ &- 1/4[U'_{i-1/2,j+1/2} + U'_{i-1/2,j} \\ &- 1/4[U'_{i-1/2,j} + U'_{i-1/2,j-1/2} \\ &+ 1/4[V'_{i+1/2,j+1/2} + V'_{i+1/2,j} \\ &+ 1/4[V'_{i+1/2,j} + V'_{i+1/2,j-1/2} \\ &- 1/4[V'_{i-1/2,j+1/2} + V'_{i-1/2,j} \\ &- 1/4[V'_{i-1/2,j} + V'_{i-1/2,j-1/2} \\ &= (3/8)(U'_{i+1/2,j} - U'_{i-1/2,j}) + (V'_{i,j+1/2} - V'_{i,j-1/2}) \\ &+ (1/16)(U'_{i+1/2,j-1} + U'_{i+1/2,j+1}) - (U'_{i-1/2,j-1} \\ &+ U'_{i-1/2,j+1}) + (V'_{i,j+1} + V'_{i,j-1}) \\ &- (V'_{i-1/2,j-1} + V'_{i-1/2,j+1}) \dots (97) \end{aligned}$$

ここで U'_{i,j} = (J \bar{U})_{i,j}, V'_{i,j} = (J \bar{V})_{i,j} とおいた

図-3に示す 1/2 形状のコントロールボリュームでは

$$\begin{aligned} \bar{D}_{i,j} &\approx (3/8)(U'_{i+1/2,j} - U'_{i-1/2,j}) + (1/16)(U'_{i+1/2,j-1} \\ &+ U'_{i+1/2,j+1}) - (U'_{i-1/2,j-1} - U'_{i-1/2,j+1}) + (3/16)(V'_{i,j+1} \\ &- V'_{i,j-1}) + (1/16)(V'_{i-1/2,j-1} - V'_{i-1/2,j+1}) \dots (98) \end{aligned}$$

となる。

図-5の 1/2 形状のコントロールボリューム V₂ においては, 式(88)の S₁ の積分は, V₁ の節点 (・印) を (i, j) として以下となる。

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (J\bar{U})d\eta &= [(J\bar{U})_{i-1/2,j} + (J\bar{U})_{i+1/2,j-1/2}]/4 \\ &= [(J\bar{U})_{i-1/2,j} + J\bar{U}_{i,j}/2 + (J\bar{U})_{i+1/2,j-1/2} \\ &+ (J\bar{U})_{i-1/2,j} + (J\bar{U})_{i-1/2,j} + (J\bar{U})_{i,j}/4]/4 \\ &= (3/16)(J\bar{U})_{i-1/2,j} + (J\bar{U})_{i,j} \\ &+ (1/16)(J\bar{U})_{i-1/2,j-1} + (J\bar{U})_{i,j-1} \dots (99) \end{aligned}$$

ここで境界上の節点における $\bar{U}_{i-1/2}, \bar{U}_{i,j}$ の値が必要である。しかし, \bar{U} は拡散項を含んでおり, 境界上の 2 階微分を計算することは困難である。そこで式(84)の導入と同様に運動方程式を用いて以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \bar{U} &= (\xi_x, \xi_y) \cdot (\bar{u}, \bar{v}) + \Delta t \delta(FX, FY)^{n+1} \\ &= (\xi_x, \xi_y) \cdot (u, v)^{n+1} + \Delta t (p_x, p_y)^{n+1/2} \dots (100) \end{aligned}$$

よって FXⁿ⁺¹, FYⁿ⁺¹ を計算せずに 1 階微分である p_x^{n+1/2}, p_y^{n+1/2} を片側差分で計算することにより, 境界上の \bar{U} が得られる。

以上のように、境界面上の節点に対してもポアソン方程式を立てて圧力を解けば、境界に接する1/2もしくは1/4形状のコントロールボリュームにおいても流量収支のバランスのとれた解を得ることができる。

8. むすび

k - ϵ 型2方程式モデルを一般曲線座標系へ拡張し、レギュラーグリッドによる定式化の方法および境界条件式を示した。

境界条件式は任意形状を許すために式が煩雑になったが、境界面の近傍において境界に直交するようなグリッドを用いれば、式は簡略化される。境界に直交しないグリッドを用いて、本報に記した式で計算を行う場合でも、なるべく境界に直交するようにグリッドを作成した方が解の精度が良く、かつ各ステップごとのイテレーション回数も少なくなる。

運動方程式の時間積分法は、Adams-Bashforth法とCrank-Nicholson法を用いた。この方法によれば、1ステップ当たりの計算量は増加するが、時間きざみに対する計算安定条件がゆるやかになるため、定常に達するまでの計算処理時間が短縮される。

次報で、速度、圧力の緩和方法と数値計算結果を示す。新しく検討した点は以下のとおりである。

(1) k - ϵ 型2方程式モデルを一般曲線座標系へ拡張し、生産項、散逸項を除く各項を保存形で表示した。

(2) 上記の方程式系において、 k と ϵ の方程式は、full-implicitスキームを適用した。

(3) コントロールボリュームにおける連続式の評価は、精度の高い積分形で定式化した。

(4) 指数則の速度境界条件、free-slipの k の境界条件、壁法則の ϵ の境界条件を一般曲線座標系に拡張する方法を示した。

(5) ポアソン方程式の圧力の2階微分項は保存的に定式化した。

(6) 領域内部と同様に境界上の圧力も未知数として、定式化した。

謝辞

本研究に当たり、名古屋大学プラズマ研究所武本行正氏が作成・公開したプログラムを参考にさせていただいている。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 例えば、Yehia M. Rizk: USE OF A HYPERBOLIC GRID GENERATION SCHEME IN SIMULATING SUPERSONIC VISCOUS FLOW ABOUT THREE-

DIMENSIONAL WINGED CONFIGURATIONS, International Symposium on Computational Fluid Dynamics-Tokyo Vol. 2, Sept. 1985

- 2) 小林敏雄, 森西洋平: Boundary-fit 曲線座標変換法による流体差分解析, 生産研究 38(1986), 12
- 3) 武本行正, 中村佳郎, 山辺春夫: ライブラリプログラムの紹介 (72) 京都大学大型計算機センター広報 Vol. 19, No. 4, (1986)
- 4) 寺井俊夫: 流線を一方の座標とする曲線座標系を用いる流れの計算法についての考察, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和50年10月
- 5) 平岡久司: 有限要素法による室内気流分布の数値計算, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和57年10月
- 6) 石田義洋: MAC法と有限要素法を組み合わせた2次元流れ解析法, その1, 日本建築学会大会学術梗概集, 昭和57年10月
- 7) 松本博他: 有限要素法による室内空気分布の数値解析, 日本建築学会計画系論文報告集, 第352号, 昭和60年6月
- 8) P.K. Yeung, S.C. Kot: COMPUTATION OF TURBULENT FLOWS PAST ARBITRARY TWO-DIMENSIONAL SURFACE-MOUNTED OBSTRUCTIONS, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 18(1985) 177-190
- 9) B.P. Leonard: THE QUICK ALGORITHM: A UNIFORMLY THIRD-ORDER FINITE DIFFERENCE METHOD FOR HIGHLY CONVECTIVE FLOWS, Computer Methods in Fluids, Pentech Press, 1980, 159-195
- 10) 村上周三, 加藤信介, 須山喜美: 室内気流数値解析の診断システム, 生産研究 38 (1986), 12
- 11) 村上周三, 加藤信介, 石田義洋, 持田 灯: 一般曲線座標系による室内気流数値シミュレーション その1, その2, 生産研究 39(1986), 5
- 12) 村上周三, 加藤信介, 石田義洋: 一般曲線座標系による室内気流数値シミュレーション その3, その4, その5, 日本建築学会関東支部研究報告集, 昭和62年
- 13) 村上周三, 加藤信介, 石田義洋: 一般曲線座標系による室内気流数値シミュレーション その6, その7, 日本建築学会大会講演梗概集, 昭和62年10月

注

- 1) 実際のグリッド分割では、 ξ -一定曲線と η -一定曲線は各節点を通る折線で近似されるから、式(6)は2点 $(i \pm 1, j)$ を結ぶ線分と2点 $(i, j \pm 1)$ を結ぶ線分が平行であるための必要十分条件である。したがって、 ξ -一定曲線と η -一定曲線が、点 $(i, j \pm 1)$ の近傍で一直線上にない場合でも、 $J=0$ となる場合が存在する。しかし、このような状態はよほど意図的に($J=0$ となるように)グリッドを切らないかぎり発生するものではない。

SYNOPSIS

UDC : 628.86 : 517.9

NUMERICAL SIMULATION OF ROOM AIR FLOW WITH GENERALIZED CURVILINEAR COORDINATES —Expressions of k - ϵ model equations and boundary conditions based on curvilinear coordinates—

by Dr. SHUZO MURAKAMI, Prof. of Institute of Industrial Science Tokyo Univ. and Dr. SHINSUKE KATO, Associate Prof. of Institute of Industrial Science Tokyo Univ. and YOSHIHIRO ISHIDA, Joint Researcher of Industrial Science Tokyo Univ. (I.P.C. Kajima Corporation Co., Ltd.), Members of A. I. J.

In the numerical analysis of the flow field with FDM or other discretization methods, any grid discretization to fit the complicated boundary configuration could be selected arbitrarily with generalized curvilinear coordinates. Generalized coordinates are much available considering the variety of the shape of the physical region of interest, while orthogonal coordinates can only be applied to simple space because they are the specific ones of generalized coordinates.

As the first step of study, two-dimensional k - ϵ model equations and their boundary conditions are worked out.

The conservative expressions of k - ϵ model equations based on them are indicated here. Discretization of dependent variables with the control volume method and formulation of the boundary conditions (i.e. power-law of the velocity, free-slip condition of the turbulence kinetic energy k , wall-law of the dissipation rate of turbulence energy ϵ) are proposed. The poisson equation of the pressure is formulated, where the second-order derivatives of the pressure are integrated conservatively over each control volume. The pressure at the boundary is solved as being unknown. Then the flow rate balances through the control volumes adjacent to the boundary are converged accurately as well as within the region.