

# SIMULATION NUMERIQUE DES ECOULEMENTS D'AIR - APPLICATION A LA VENTILATION D'UNE CABINE DE PEINTURE

F. DELLAGI, J.Y. DUMAINE, G. AUBERTIN

Service Thermique, Ventilation, INRS, B.P. 27, 54501 VANDOEUVRE Cédex (France)

## RESUME

Une étude numérique des écoulements tridimensionnels instationnaire est présentée. Trois méthodes, l'une semi-implicite, les deux autres explicites sont comparées et testées sur des configurations d'écoulements types (cavité entraînée, cavité en convection, cavité en convection mixte). Ces méthodes sont ensuite appliquées à un problème de ventilation d'une cabine de peinture. La méthode semi-implicite a prouvé sa supériorité en précision. La méthode explicite du type M.A.C. s'est révélée plus économique en temps de calcul.

## INTRODUCTION

Lors de la conception d'une installation de ventilation générale, il est nécessaire de prendre en compte l'ensemble des mécanismes de transport des polluants au sein du local. Dans la très grande majorité des cas, ces mécanismes sont liés aux propriétés convectives et diffusionnelles de l'écoulement de l'air. Or, celles-ci sont en général fort mal connues du fait de leur dépendance étroite aux conditions locales d'écoulement.

C'est pourquoi, il est paru intéressant de développer des codes de calcul permettant de prévoir le champ des vitesses et ultérieurement des concentrations en polluant en tout point du local. Les travaux présentés constituent une première étape dans la mise au point de ces codes.

## FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME ET METHODES DE RESOLUTION

Les configurations d'écoulement d'air rencontrées dans les problèmes de ventilation sont essentiellement tridimensionnelles. En considérant l'air au sein du local comme un gaz idéal incompressible, l'écoulement est régi par le système d'équations dit de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \cdot \nabla V_i, j = - \frac{1}{\rho} P_i + \frac{1}{Re} U_{i,jj} \quad i = 1, 2, 3$$

$$V_i \cdot i = 0$$

Il existe dans la littérature un nombre assez important de méthodes de résolution de ce système d'équations dans le cas des écoulements bidimensionnels. Citons en particulier la méthode K- $\epsilon$  utilisée par Nielson [7] pour étudier la ventilation d'une pièce chauffée uniformément par le sol. Cette méthode consiste à résoudre, en plus des équations de Navier-Stokes, deux équations de transport, l'une de l'énergie cinétique turbulente  $K$ , l'autre du taux de dissipation de l'énergie  $\epsilon$ . La bibliographie sur les écoulements tridimensionnels est en revanche peu abondante, notamment en espace confiné. C'est pourquoi, nous avons été amenés à tester, dans une configuration du type de celles rencontrées dans les problèmes de ventilation, différentes méthodes de résolution numérique, extrapolées à partir de celles développées en écoulement bidimensionnel.

Trois méthodes basées sur une discrétisation par la méthode des différences finies ont été comparées :

- La méthode explicite SOLA [1] de type M.A.C. (Marker and Cell), étendue au cas des écoulements tridimensionnels par Gaillard [2],
- La méthode explicite de compressibilité artificielle [3],
- La méthode semi-implicite de compressibilité artificielle [4].

Ces trois méthodes se distinguent, d'une part, au niveau de la limitation dans le choix du pas de temps  $\Delta t$  et, d'autre part, dans le traitement du gradient de pression.

La discrétisation des équations de Navier-Stokes est obtenue par une méthode de différence finie décrite dans la réf. 6, en utilisant un maillage entrelacé du type M.A.C. (fig. 1).

#### Rappel de la méthode explicite "SOLA"

Le schéma aux différences finies s'écrit :

$$v^{n+1} = \Gamma^n - \Delta t \operatorname{grad} p^{n+1} \quad \text{avec } \Gamma^n = v^n + \text{termes de transport} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v^{n+1} = 0 \quad (2)$$

L'équation (2) est résolue de façon itérative dans chaque maille en ajustant les pressions et les vitesses par les quantités  $\delta p^v$  et  $\delta v^v$ .

$v$  : indice d'itération.

$$\delta p^v = -\omega \cdot \frac{(\operatorname{div} v^{n+1})^v}{2 \Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)}$$

$$1 < \omega < 2$$

$\omega$  : coefficient de surrelaxation

$$\frac{\partial v^v}{\partial t} = \Delta t \frac{\partial p^v}{\Delta x_i}$$

La stabilité numérique du schéma nécessaire par la convergence a été étudiée par Viecelli [8] et a permis de connaître les restructurations sur le choix du pas de temps :

$$\Delta t \leq \frac{1}{2v} \frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}$$

$$\Delta t \leq \min \left( \frac{\Delta x}{|U|}, \frac{\Delta y}{|V|}, \frac{\Delta z}{|W|} \right)$$

### Méthode de compressibilité artificielle

Introduisons l'équation de compressibilité artificielle :

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -C \cdot \operatorname{div} V^v$$

Cette équation est liée aux équations de Navier-Stokes d'un fluide compressible dont la loi d'état s'écrit :

$$P = a^2 \rho \quad a^2 = \text{cte}$$

La méthode de compressibilité artificielle consiste à remplacer l'équation de continuité  $\operatorname{div} V = 0$  par l'équation  $\frac{\partial P}{\partial \tau} = -C \cdot \operatorname{div} V^v$

A l'état asymptotique,  $\operatorname{div} V \rightarrow 0$ .

Le schéma explicite s'écrit sous la forme symbolique suivante :

$$M_U (U_h^{n+1}, U_h^n, V_h^n, W_h^n, P_h^n) = 0$$

$$M_V (U_h^n, V_h^{n+1}, V_h^n, W_h^n, P_h^n) = 0$$

$$M_W (U_h^n, V_h^n, W_h^{n+1}, W_h^n, P_h^n) = 0$$

$$P_h^{n+1} - P_h^n = -C \Delta t D (U_h^{n+1}, V_h^{n+1}, W_h^{n+1})$$

Le test de convergence du schéma est le suivant :

$$\max_{i,j,k} |\xi^{n+1} - \xi^n| < 10^{-6}$$

i.j.k.

$\xi$  : U, V, W, P

#### La stabilité numérique du schéma explicite

Il n'existe pas de théorie générale permettant d'étudier la stabilité globale des méthodes de résolution des équations non linéaires. Nous étudions la stabilité du système tangent en utilisant la méthode de Von Neumann. Les conditions de stabilité retenues seront les conditions les plus restrictives sur le domaine.

Nous écrivons qu'une perturbation à l'instant initial restera bornée au cours des itérations.

Les calculs effectués sont décris dans la réf. 6. Nous obtenons les restrictions suivantes sur le pas de temps  $\Delta t$  :

$$\frac{\Delta t}{Reh^2} \leq \frac{1}{6}$$

$$(|U| + |V| + |W|) \frac{\Delta t}{h} \leq 1$$

$$C > 0$$

$$\frac{C\Delta t^2}{h^2} + \frac{2\Delta t}{Reh^2} \leq \frac{1}{3}$$

Notons que ces conditions sont plus restrictives que celles obtenues par Viecelli [8].

#### La méthode semi-implicite de compressibilité artificielle

L'avantage théorique de ce schéma est qu'il ne comporte pas de restrictions sur le pas de temps contrairement aux schémas explicites, ce qui pourrait se traduire par une diminution notable du temps de calcul.

La résolution numérique de ce schéma est faite à l'aide d'une procédure itérative du type Gauss-Seidel [6].

Le système d'équation à résoudre s'écrit :

$$U_h^{n+1,v+1} = U_h^{n+1,v} - K L_U(U_h^{n+1,v}, V_h^{n+1,v}, W_h^{n+1,v}, P_h^{n+1,v})$$

$$V_h^{n+1,v+1} = V_h^{n+1,v} - K L_V(U_h^{n+1,v+1}, V_h^{n+1,v}, W_h^{n+1,v}, P_h^{n+1,v})$$

$$W_h^{n+1,v+1} = W_h^{n+1,v} - K L_W(U_h^{n+1,v+1}, V_h^{n+1,v+1}, W_h^{n+1,v}, P_h^{n+1,v})$$

$$P_h^{n+1,v+1} = P_h^{n+1,v} - C \Delta \tau D(U_h^{n+1,v+1}, V_h^{n+1,v+1}, W_h^{n+1,v+1})$$

$\tau$  est le temps fictif lié à l'itération  $v$ .

$K$  et  $C$  sont des constantes déterminées à partir de l'analyse de stabilité et optimisées de façon à assurer la convergence la plus rapide.

Le test de convergence de cette procédure est le suivant :

$$\max_{U,V,W} \max_{i,j,h} [|L_U|, |L_V|, |L_W|, |D|] < \epsilon$$

#### Stabilité numérique du schéma semi-implicite

Les calculs sont effectués de la même manière que pour le schéma explicite. Nous obtenons les inégalités suivantes :

$$0 < K < \frac{Re h^2}{3} \quad C > 0$$

$$K (|U| + |V| + |W|)^2 \leq \frac{12 \Delta t^2}{Re h^2}$$

$$\frac{3K}{h^2} (C \Delta \tau + \frac{1}{Re} + \frac{h^2}{6 \Delta t}) < 1$$

Ces inégalités montrent que quel que soit le choix du pas de temps  $\Delta t$ , il existe toujours un  $K$  et un  $C$  qui satisfont aux conditions de stabilité.

#### VALIDATION DES CODES DE CALCULS SUR UN CAS TEST

Les trois schémas ont été utilisés pour déterminer le champ des vitesses dans une cavité entraînée (fig. 2), ceci afin de tester la précision et la stabilité des méthodes numériques ainsi que leur aptitude à simuler les écoulements à fort nombre de Reynolds ( $Re$ ) ou présentant des zones de recirculation. Les calculs ont été réalisés en tridimensionnel pour les nombres de Reynolds 10, 100 et 1000.

La comparaison des trois méthodes a montré que le schéma explicite SOLA est performant en temps de calcul (C.P.U.). Le gain sur le pas de temps obtenu pour le schéma semi-implicite (dix fois plus grand) ne suffit pas à compenser la nécessité d'itérer sur les vitesses à chaque pas de temps. En revanche, ce schéma est d'une meilleure précision. Le schéma explicite de la méthode de compressibilité artificielle nécessite un nombre aussi important d'itérations dans le temps.

En imposant des conditions limites de symétrie sur les faces  $P_1$  et  $P_2$ , l'écoulement obtenu est de nature bidimensionnelle, ce qui nous a permis de comparer nos résultats avec la littérature.

La configuration de l'écoulement dans le pan médian pour un nombre de Reynolds  $Re = 100$  est donnée figure 3. Nous pouvons voir le tourbillon primaire. Les deux tourbillons secondaires des deux coins inférieurs ne sont pas visibles sur cette figure mais ont pu être décelés à partir des champs de vitesses.

Les résultats obtenus (position du centre du tourbillon principal  $X_0$ , positions et tailles des tourbillons secondaires de droite  $(X_1, Z_1)L_1$  et de gauche  $(X_2, Z_2)$  et  $L_2$ ) sont comparés avec ceux publiés par d'autres auteurs (voir tableau 1).

Le tableau suivant donne les coordonnées des centres du tourbillon primaire ( $X_0, Z_0$ ), du tourbillon secondaire de gauche ( $X_1, Z_1$ ) et du tourbillon secondaire de droite ( $X_2, Z_2$ ) pour un écoulement à  $Re = 100$ .

TABLEAU 1

Coordonnées des centres des tourbillons et tailles des tourbillons secondaires.  
Cavité entraînée  $Re = 100$ .

Auteurs	Maillage	$X_0$ $Z_0$	$X_1$ $Z_1$	$X_2$ $Z_2$	$L_1$	$L_2$
Présente étude	22x12x22	0,65 0,75	0,02 0,03	0,95 0,05	(0,10 ; 0,11)	(0,05 ; 0,05)
Tuann et Olson	8x8	0,62 0,74	0,05 0,07	0,97 0,04	(0,13 ; 0,16)	(0,07 ; 0,07)
Goda (3D)	20x20x20	0,62 0,75			(0,10 ; 0,13)	(0,11 ; 0,13)
Schreiber et Keller	121x121	0,61 0,74				

## APPLICATION A LA VENTILATION D'UNE CABINE DE PEINTURE

Le schéma SOLA et le schéma semi-implicite ont été testés sur une configuration réelle d'écoulement. Il s'agit de la ventilation d'une cabine de peinture du type "carrossier". L'air est introduit dans la cabine à vitesse constante ( $W = 1$ ) par un plafond filtrant les poussières (plenum). Il est extrait au niveau du sol par un système d'évacuation composé de deux fosses parallèles (fig. 4).

L'écoulement est supposé bidimensionnel et laminaire. Le caractère bidimensionnel de l'écoulement a été vérifié expérimentalement par une autre équipe de l'INRS [5]. La symétrie de la cabine nous a permis de restreindre les calculs à sa moitié.

### Résultats de calcul

Les écoulements étudiés sont ceux correspondant à  $Re = 100$ ,  $Re = 1000$  et  $Re = 5000$ . Les calculs sont faits en utilisant le code explicite SOLA et le code semi-implicite. Le maillage choisi est  $(22 \times 6 \times 22)$  et le pas de temps est  $\Delta t = 0,01$ . L'état initial de l'écoulement à  $Re = 100$  est celui du repos, tandis que ceux des écoulements à  $Re = 1000$  et  $Re = 5000$  sont les états asymptotiques obtenus à  $Re = 100$  et  $Re = 1000$  respectivement. La convergence a été très lente, notamment pour le schéma "semi-implicite" ; ceci est dû, d'une part, à la discontinuité des conditions aux limites et, d'autre part, à la lenteur de la procédure itérative de Gauss Seidel. En effet, en prenant comme conditions aux limites à la sortie les valeurs des vitesses calculées par le code SOLA, la convergence de la méthode semi-implicite s'obtient au bout de 100 itérations seulement.

Les trois écoulements étudiés se distinguent par la longueur de leurs zones de recirculations (figures 5, 6). A  $Re = 5000$ , nous avons mis en évidence l'existence d'une zone de fluide mort tout au long de la paroi (figure 7).

Les coordonnées  $(X_1, Z_1)$  et  $(X_2, Z_2)$  des points de décollement et de recollement ainsi que d'autres résultats de calcul sur l'Amdhal V7 sont regroupés dans le tableau 2.

TABLEAU 2

Cabine de peinture - Résultats de calcul.

Re	Nombre d'itérations/ $\Delta t$	CPU/ $\Delta t$	Nombre de cycles	CPU total	Longueurs de zones de recirculation (m) ( $X_1 ; Z_1$ )	( $X_2 ; Z_2$ )
100	823	14,5	371	105 mn	(0,92 ; 1,36)	(0,92 ; 0,42)
1000	822	14,5	470	31 mn 05	(0,77 ; 2,10)	(0,77 ; 0,75)
5000	819	14,5	586		(0,77 ; 2,81)	(0,77 ; 0,15)

## DEVELOPPEMENT

Etudions maintenant le cas où l'air transporte un polluant. Introduisons alors l'hypothèse supplémentaire suivante : les propriétés physiques de l'air sont supposées constantes, sauf la masse volumique pour laquelle l'approximation de Boussinesq est appliquée.

Dans le cas où il n'existe qu'un seul polluant, le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \cdot V_{i,j} = - \frac{1}{\rho} P_{,i} + \rho_0 \beta g(T - T_0) \delta_{i3}$$

$$V_i \cdot i = 0$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\lambda}{\rho C_p} T_{,ii}$$

L'analyse théorique de la stabilité de ce système a été réalisée pour les deux schémas de la méthode de compressibilité artificielle et a permis de préciser les nouveaux domaines de stabilité. Les inégalités supplémentaires qui doivent être satisfaites respectivement sont les suivantes :

- Schéma explicite :

$$\frac{\Delta t}{Re \cdot Pr \cdot h^2} \leq \frac{1}{6}$$

- Schéma semi-implicite :

$$K_T > 0 ; \frac{K_T}{h^2} \left( \frac{h^2}{2 \Delta t} + \frac{3}{Re \cdot Pr} \right) \leq 1 \text{ et } (|U| + |V| + |W|)^2 \leq \frac{3}{Re \cdot Pr}$$

Application à la cavité en convection naturelle

Les résultats obtenus, tant pour le champ de vitesses que pour le champ de polluant (position du centre de tourbillon principal, position des tourbillons secondaires, courbes isopoluant et coefficient de transfert de chaleur à la paroi), concordent parfaitement avec ceux relevés dans la bibliographie.

TABLEAU 3

Cavité en convection naturelle - Résultats de calcul.

Nombre de Rayleigh	Schémas	Nombre d'itérations/ $\Delta t$	CPU/ $\Delta t$ (s)	CPU total Amdhal V7	$\bar{N}_u$		
					Présente étude	De Vahl Davis	Poots
Ra = 100	SOLA Semi-implicite	64	0,68	1 mn	1,015		
		62	4,46	2 mn 45	1,0045		
Ra = 1000	SOLA Semi-implicite	56	0,64	3 mn 25	1,10		
		98	5,85	4 mn 01	1,19	1,117	1,041
Ra = $10^4$	SOLA Semi-implicite	64	0,82	4 mn 15	2,285		
		62	10,63	5 mn 19	2,30	2,24	1,706

Application à la cavité entraînée en convection mixte

Le but de ce calcul est de mettre en évidence la modification de la configuration de l'écoulement, due aux forces de volume (figure 9).

Ces codes doivent maintenant être appliqués à la cabine de peinture.

## CONCLUSION ET DEVELOPPEMENTS FUTURS

Les trois codes de calcul développés se sont révélés aptes à résoudre certains problèmes rencontrés dans le cadre de la ventilation générale des locaux, avec la supériorité du code SOLA qui est plus économique en temps C.P.U. Ils donnent déjà des renseignements fort intéressants. Toutefois, la mise au point de ces codes doit être poursuivie, d'une part, afin de surmonter quelques difficultés numériques et, d'autre part, afin d'introduire le mécanisme de la turbulence.

## NOMENCLATURE

$v_i$ ( $U, V, W$ )	: Composantes de la vitesse
$p$	: Pression
$T$	: Température
$\rho$	: Masse volumique de l'air
$t$	: Temps
$\Delta t$	: Pas de temps
$x, y, z$	: Coordonnées
$h$ ou $\Delta x, \Delta y, \Delta z$	: Pas d'espace
$\text{div}$	: Divergence
indices	
$i$	: 1, 2, 3
$h$	: Indice de discréétisation dans l'espace
$n$	: Indice de discréétisation dans le temps
$v$	: Indice d'itération
$C_p$	: Capacité calorifique à pression constante (par unité de masse)
$\beta$	: Coefficient d'expansion volumique
$g$	: Accélération de la pesanteur
$\lambda$	: Conductivité thermique
$Re : \frac{VL}{\nu}$	: Nombre de Reynolds
$Pr : \frac{C_p \mu}{\lambda}$	: Nombre de Prandtl
$Ra = \frac{g BL^3}{\alpha \nu} \frac{\Delta t}{\Delta t}$	: Nombre de Rayleigh
$Nu$	: Nombre de Nusselt local
$\overline{Nu}$	: Nombre de Nusselt moyen

## Références

- [ 1 ] Nichols B.D., ROMERO N.C., HIRT C.W.  
SOLA : a numerical solution for transient fluid flows, Los Alamos scientific laboratory report La 5852 - 1975.
- [ 2 ] Gaillard P.  
Thèse de Docteur-Ingénieur Université Claude Bernard, Lyon - 1978.
- [ 3 ] Chovin A.J.  
A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. Jour. Comp. Phys. 2, 12-26 - 1967.
- [ 4 ] Chovin A.J.  
Numerical solution of the Navier-Stokes Equations - Mathematics of Computation, n° 22 - Oct. 1978.
- [ 5 ] Cornu J.C., Leleu J., Gerber J.M., Vincent R., Voirin D., Aubertin G.  
Détermination de critères de ventilation des cabines de peinture fermées.  
Validation sur 14 cabines en exploitation.
- [ 6 ] Dellagi F.  
Thèse de Docteur de 3ème cycle - Université de P. & M. Curie, Paris - 1983
- [ 7 ] P.V. Nielsen  
Flow in air conditioned rooms, Danfoss, Norberg - 1976.
- [ 8 ] Viecelli J.A.  
A computing method for incompressible fluid, Computing technique Jour. Comp. Phys. p. 8-119-143 - 1971.
- [ 9 ] Devahl Davis G., Léon G S.S.  
Conférence de Swansee - 1981.
- [ 10 ] Poots G.  
Heat transfert by laminar free convection in enclosed plans gas layers A.  
Jow. Mech. App. Math. 11(3) pp 257-273 - 1958.

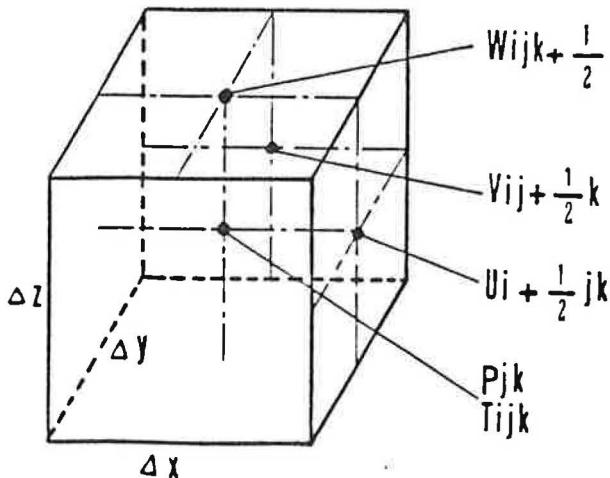


Fig. 1. : Maille i, j, k

Fig. 2. : Cavité entraînée - Champ de vitesses

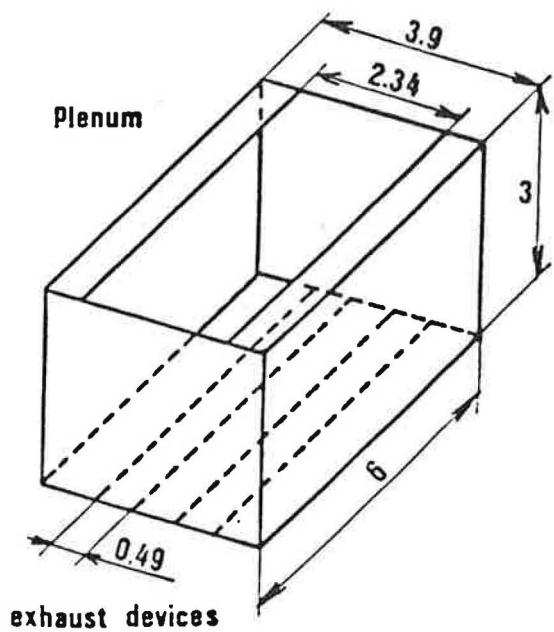
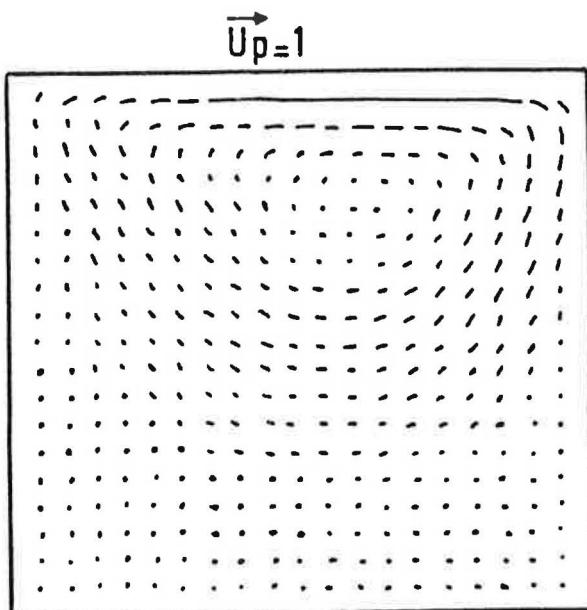


Fig. 3. : Champ de vitesses - Cabine de peinture

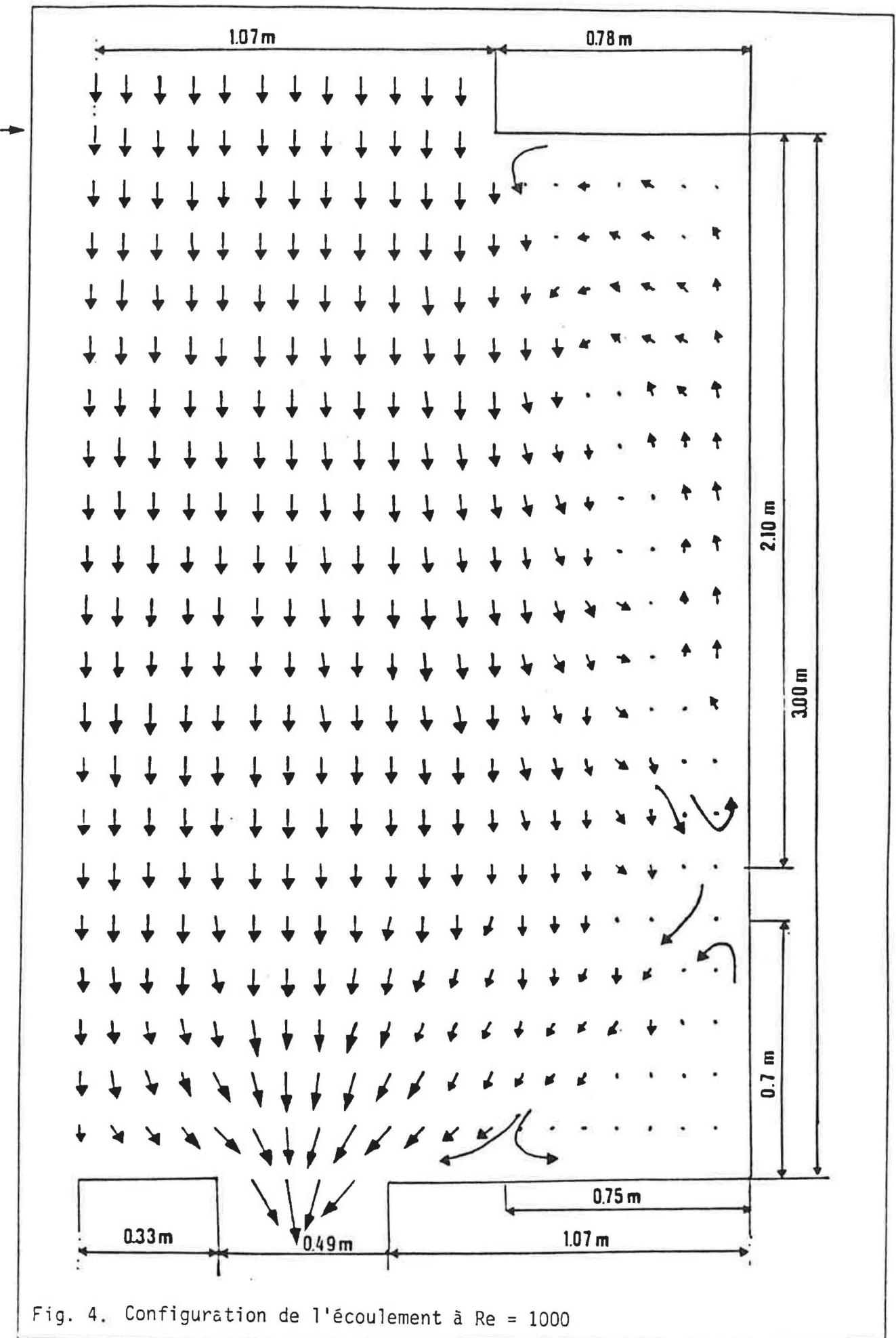


Fig. 4. Configuration de l'écoulement à  $Re = 1000$

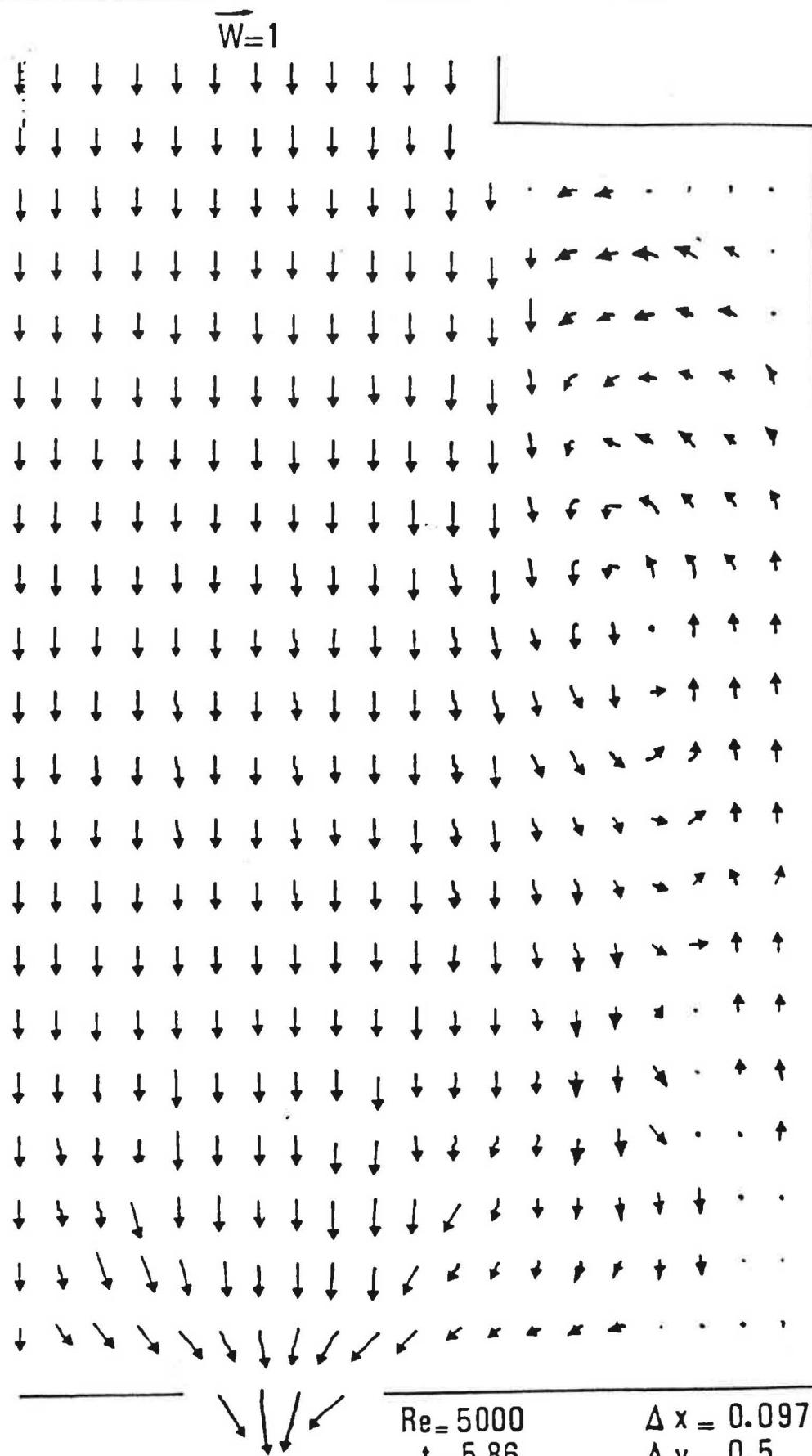


Fig. 5. : Configuration de l'écoulement à  $Re = 5000$  -  
Cabine de peinture - Champ des vecteurs  
vitesses

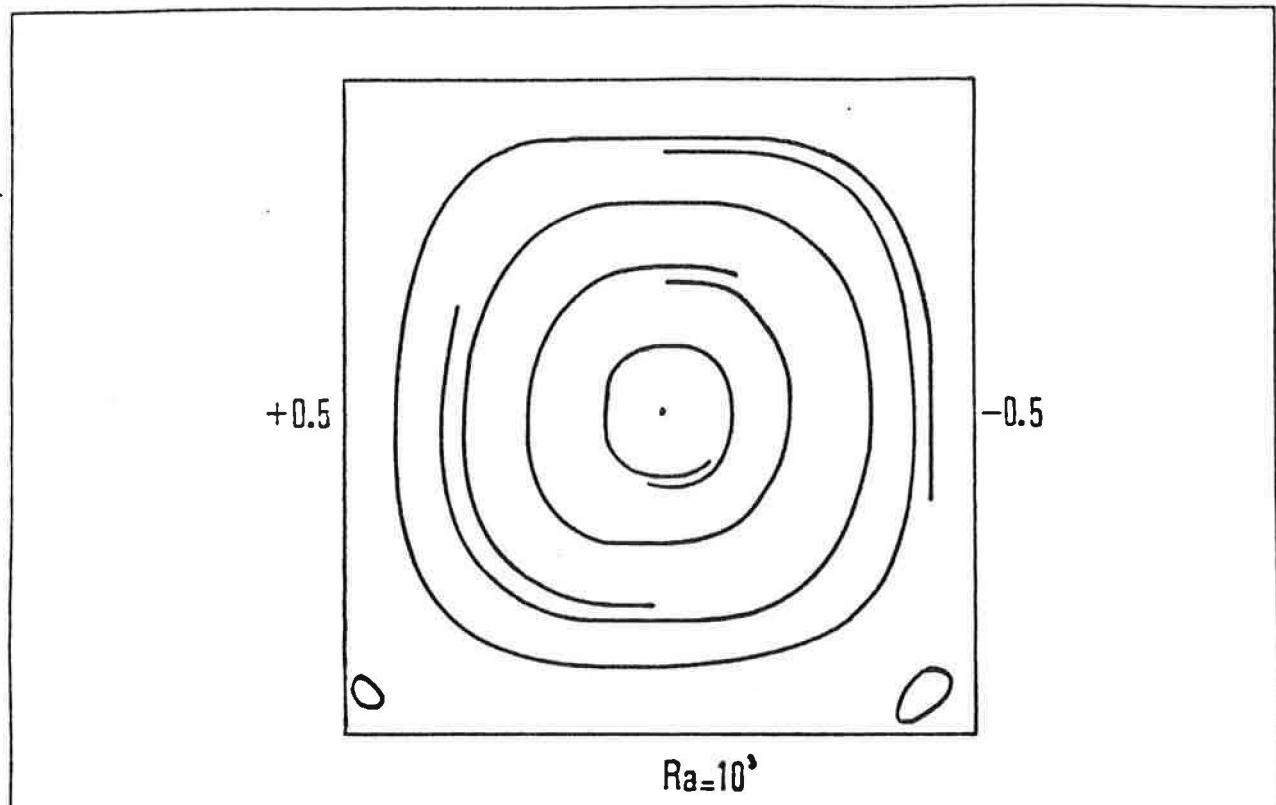


Fig. 6. : Cavité en convection trajectoire pour  $Ra = 10^4$

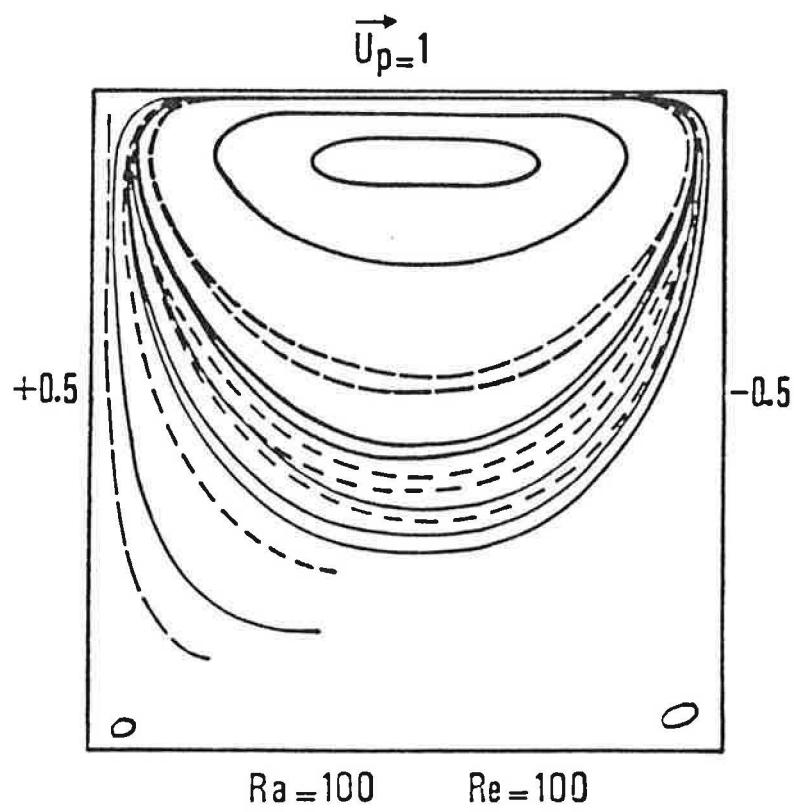


Fig. 7. : Cavité entraînée chauffée