2190

AIC 1597

TITLE: NUMERICAL ANALYSIS OF ROOM AIR DISTRIBUTION BY THE FINITE ELEMENT METHOD

AUTHORS: H. Matsumoto, F. Hasegawa, and Y. Utsumi

SUBMITTED TO: Journal of Architecture, Planning and Environmental Engineering (Transactions of AIJ) No. 352, 1985

【研究論文】
UDC : 628.86

日本建築学会計画系論文報告集
第 352 号・昭和 60 年 6 月

有限要素法による室内空気分布の数値解析

正会員 松本 博*
正会員 長谷川 房雄**
正会員 内海 康雄***

1. 序

室内空気分布の数値予測法は，偏微分方程式で記述された場の方程式を差分法や有限要素法などの離散化手法を用いて解析する方法であり，模型実験による方法などと並んで有力な予測法となっている。その解析手法のほとんどは差分法を中心としたものであり[1]~[10]，有限要素法によるものは少ない[11]~[14]。これは有限要素法が差分法に較べて歴史が浅いために，非圧縮性の条件の数値的処理や離散化された非線形連立方程式の解法あるいは誤差評価などの解析理論および技術が遅れていること，アルゴリズムが複雑であること，演算時間がかかるなどの理由があげられる。しかしながら差分法では原則として直交格子を採用せざるを得ないのに対して，有限要素法では任意形状の領域を扱うことができ，差分法では特別の処理を必要とするNeumann型境界条件の処理が有限要素法では自然境界条件として容易に取り扱える。また，有限要素法では任意の近似内挿関数の選択により近似解の精度を自由に変化させることができ，解析対象に応じた計算が可能である。したがって有限要素法は一般に汎用性に優れており，室内空気分布の数値解析の分野でも差分法では扱いにくい問題に対しては有効な手法になり得ると考えられる。

本報は有限要素法の室内空気分布の数値解析への応用を目的としたものであり，計算の効率化と安定性を目指した解析手法のアルゴリズムに特徴がある。乱流の数学モデルとして2方程式モデルを用い，離散化手法には連続の式をペナルティー関数により処理したいわゆるペナルティー有限要素法を採用している。この方法は非圧縮性の条件をややゆるめた人工圧縮性を導入する手法の一種と考えられ，粘性流体の有限要素解析では主流になりつつある手法であるが，数値誤差解析に関しては十分な議論がなされていない。本報ではこの点に関しても考察を加え手法の有効性について検討するものである。

[記号]

u_i：i 方向の速度成分
P：圧力
ρ：空気密度
μ：粘性係数
ν：動粘性係数
R_e：レイノルズ数
λ：ペナルティー乗数または固有値
k：乱流エネルギー
ε：エネルギー逸散率
ν_t：渦動粘性係数
u_*：摩擦速度
κ：カルマン常数
α：刻み幅
$\dot{}$：時間微分
$\boldsymbol{X}$：設計変数ベクトル
$f(\boldsymbol{X})$：目的関数ベクトル
$\boldsymbol{d}$：方向ベクトル
$C_\mu, C_{D1}, C_{D2}, C_k, C_\varepsilon$：$k-\varepsilon$ モデルの定数

2. 重みつき残差法による基礎式の離散化

一般に乱流現象の実用的な予測計算にはNavier-Stokes方程式をモデル化した式を用いる場合が多く，特に室内気流のような複雑な流れに対しては微分法の一つである平均乱流場法(MTF)の中の2方程式モデルが経験的な仮定の少ない普遍性のある乱流モデルとして広く適用され[1),4),8),9]，有効性が確認されている。本研究でも室内空気の乱流モデルとして2方程式モデルを採用する。その中でも係数の普遍性と物理的解釈の点で優れている $k-\varepsilon$ モデルを考える。Launder and Spalding[15] による $k-\varepsilon$ モデルを伴せた室内空気の基礎式はテンソル表示を用いて次式で与えられる。ただし，本論文全編においては時間に関する偏微分を $\dot{}$ で表し，$(\ )_{,i}$ は直交座標 $x_i\,(i=1,2,3)$ に関する偏微分を意味する。また，同一項に同じサフィックスが複数ある場合には総和規約を用いるものとする。

本研究の一部は，昭和58年度日本建築学会東北支部研究発表会[14]で発表した。

* 東北大学 助手・工博
** 東北工業大学 教授・工博
*** 宮城工業高等専門学校 助手・工博

(昭和59年6月15日原稿受理日，昭和60年2月8日改訂原稿受理日，討論期限昭和60年9月末日)

$$u_{j,j}=0 \cdots\cdots (1)$$

$$\dot{u}_i+u_j u_{i,j}=-\Pi_{,i}+\{(\nu+\nu_t)(u_{i,j}+u_{j,i})\}_{,j} \cdots\cdots (2)$$

$$\dot{k}+u_j k_{,j}=\left\{\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)k_{,j}\right\}_{,j}+\nu_t S-\varepsilon \cdots\cdots (3)$$

$$\dot{\varepsilon}+u_j\varepsilon_{,j}=\left\{\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\varepsilon_{,j}\right\}_{,j}+C_{D1}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t S-C_{D2}\frac{\varepsilon^2}{k} \cdots\cdots (4)$$

$$\nu_t=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \cdots\cdots (5)$$

ここに，$\Pi=p/\rho+2k/3$，$S=(u_{i,j}+u_{j,i})u_{i,j}$，$C_\mu=0.09$，$C_{D1}=1.44$，$C_{D2}=1.92$，$\sigma_k=1.0$，$\sigma_\varepsilon=1.3$，である。一般に有限要素法によって境界値問題を解く場合，定常熱伝導方程式などの自己随伴型の微分方程式には変分原理が存在し，原方程式を解くことはその方程式の汎関数を最小にする問題に帰着されるが，Navier-Stokes 方程式には変分原理が存在しない[16]。そのために重みつき残差法による解法が，一般的に用いられる。すなわち方程式に重み関数を乗じ領域 Ω で積分し，粘性項に対して部分積分を施した弱形式を満たす速度と圧力の近似解を求める問題に帰着させる。そのときに問題になるのは非圧縮性の条件の取り扱いであり，$u_{j,j}=0$ の下では圧力 P には常に定数関数だけの不定性が伴うために圧力振動による数値的不安定を起しやすい。これは速度と圧力の近似空間 V_h，Q_h がいわゆる Babuška-Brezzi の条件

$$\sup_{v_h\in V_h}\int_\Omega q_h\, div\, v_h\, d\Omega/\|v_h\|\geq\alpha|q_h|$$

$$\forall q_h\in Q_h,\ \exists\alpha>0 \cdots\cdots (6)$$

を満たさないためであると言われている[17]。ここに v_h と q_h は速度と圧力の近似内挿関数で $\|\cdot\|$ はノルム，α は正の定数である。この条件を満たす V_h と Q_h の組み合わせを一般に見つけ出すことは非常に難しい問題であるとされている（(文献17)に詳しい)。そのため $u_{j,j}=0$ の条件を消すかあるいはゆるめる種々の方法が考えられてきた。たとえば流れ関数と渦度を用いる方法[18]，流れ関数を用いる方法[19]，人工圧縮性を導入する方法[20]などがある。ここでは，ペナルティー法を用いて $u_{j,j}=0$ の条件をゆるめる方法を考える。これは圧力に対して次式で与えられるペナルティー関数を用いることにより，十分大きな λ に対して $u_{j,j}\to 0$ とするものであり，一種の人工圧縮性を与える方法と考えられ，水上[21]は物理的な意味として非圧縮性を体積粘性の大きい圧縮性で近似する方法であると述べている。すなわち，ペナルティー乗数 λ を用いた近似圧力 $P^{(\lambda)}$ を次式で与える。

$$P^{(\lambda)}=-\lambda u^{(\lambda)}_{j,j}\ (\lambda\to\infty \text{ のとき } P^{(\lambda)}\to P) \cdots\cdots (7)$$

（7）式を定常の Navier-Stokes 方程式に代入すると次式が得られる。

$$u^{(\lambda)}_j u^{(\lambda)}_{i,j}=\lambda(u^{(\lambda)}_{j,j})_{,i}+\{\nu(u^{(\lambda)}_{i,j}+u^{(\lambda)}_{j,i})\}_{,j}+F_i \cdots\cdots (8)$$

ここに F_i は外力項である。$\lambda\to\infty$ のとき $u_{j,j}\to 0$，$P^{(\lambda)}\to P$，$u^{(\lambda)}_i\to u_i$ となることはレイノルズ数が小さく移流項が無視できる Stokes 流れについては容易に証明できる（たとえば Temann[22] 参照)。また Reddy ら[23]は一般の Navier-Stokes 方程式に拡張し，ペナルティー法による解の存在と収束性を証明した。またその場合の解の収束率（rate of convergence）は Stokes 流れの場合の $\frac{1}{2}$ になることを示した。

この方法により基礎式が1つ減り未知数も1つ減ることになり経済的なメリットは大きい。次に圧力にペナルティー関数を用いた基礎式に重みつき残差法の一つであるガラーキン法（標準ガラーキン法あるいは Bubnov ガラーキン法）の適用を考える。ただし以下では (λ) を省略し時間的に定常な流れを考える。未知変数 u_i，k，ε の近似内挿関数として基底関数 Φ_α を用いて以下のように表す。

$$u_i=\Phi_\alpha u_{\alpha i},\quad k=\Phi_\alpha k_\alpha,\quad \varepsilon=\Phi_\alpha\varepsilon_\alpha \cdots\cdots (9)$$

ここに1要素の節点数を N とすると，$\alpha=1\sim N$ の値をとる。たとえば，$\Phi_\alpha k_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{N}\Phi_\alpha k_\alpha$ を表すものとする。重み関数に Φ_α を選び要素領域 Ω_e で積分しグリーンガウスの定理より以下の弱形式化された重みつき残差方程式が得られる。

$$\begin{aligned}R(u)=&\int_{\Omega_e}(\Phi_\alpha u_j u_{i,j})d\Omega\\&\int_{\Omega_e}\{(\nu+\nu_t)\Phi_{\alpha,j}(u_{i,j}+u_{j,i})\}d\Omega\\&+\int_{\Omega_e}(\lambda\Phi_{\alpha,i}u_{j,j})d\Omega-\int_{\Gamma_e}\{\Phi_\alpha(\nu+\nu_t)\\&\cdot(u_{i,j}+u_{j,i})n_j+\Phi_\alpha\lambda u_{j,j}n_i\}d\Gamma\equiv 0 \cdots\cdots (10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(k)=&\int_{\Omega_e}\{\Phi_\alpha(u_j k_{,j}-\nu_t S+\varepsilon)\}d\Omega\\&+\int_{\Omega_e}\left\{\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)k_{,j}\Phi_{\alpha,j}\right\}d\Omega\\&-\int_{\Gamma_e}\left\{\Phi_\alpha\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)k_{,j}n_j\right\}d\Gamma\equiv 0 \cdots\cdots (11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(\varepsilon)=&\int_{\Omega_e}\left\{\Phi_\alpha\left(u_j\varepsilon_{,j}-C_{D1}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t S+C_{D2}\frac{\varepsilon^2}{k}\right)\right\}d\Omega\\&+\int_{\Omega_e}\left\{\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\varepsilon_{,j}\Phi_{\alpha,j}\right\}d\Omega\\&-\int_{\Gamma_e}\left\{\Phi_\alpha\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\varepsilon_{,j}n_j\right\}d\Gamma\equiv 0 \cdots\cdots (12)\end{aligned}$$

ここに η_j は単位法線ベクトルの j 成分，Γ_e は要素 e の境界を表す。(10)～(12) 式に（9）式を代入し要素ごとに積分し領域全体で重ね合わせることにより離散化された有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\Phi_\alpha\Phi_\beta\Phi_{\gamma,j})d\Omega\, u_{\beta j}u_{\gamma i}+\int_\Omega\{(\nu+\nu_t)\\&\cdot(\Phi_{\alpha,j}\Phi_{\beta,i}+\Phi_{\alpha,k}\Phi_{\beta,k}\delta_{ij})+\lambda\Phi_{\alpha,i}\Phi_{\beta,j}\}\\&\cdot d\Omega\, u_{\beta j}-\int_\Gamma\{\Phi_\alpha(\nu+\nu_t)(u_{i,j}+u_{j,i})n_j\\&+\Phi_\alpha\lambda u_{j,j}n_i\}d\Gamma=0 \cdots\cdots (13)\end{aligned}$$

$$\int_\Omega(\Phi_\alpha\ \Phi_\beta\ \Phi_{\gamma,j})d\Omega\ u_{\beta j}k_\gamma-\int_\Omega(\nu_t\ \Phi_\alpha S)d\Omega$$

$$+\int_\Omega(\Phi_\alpha\Phi_\beta)d\Omega\ \varepsilon_\beta+\int_\Omega\left\{\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(\Phi_{\alpha,j}\ \Phi_{\beta,j}\right)\right\}d\Omega\ k_\beta-\int_\Gamma\left\{\Phi_\alpha\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)k_{,j}\ n_j\right\}d\Gamma=0 \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\int_\Omega(\Phi_\alpha\ \Phi_\beta\ \Phi_{\gamma,j})d\Omega\ u_{\beta j}\ \varepsilon_\gamma-C_{D1}\ C_\mu$$

$$\cdot\int_\Omega(\Phi_\alpha\ \Phi_\beta\ S)d\Omega\ k_\beta+C_{D2}\int_\Omega\left(\Phi_\alpha\frac{\varepsilon^2}{k}\right)d\Omega$$

$$+\int_\Omega\left\{\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\Phi_{\alpha,j}\ \Phi_{\beta,j}\right\}d\Omega\ \varepsilon_\beta$$

$$-\int_\Gamma\left\{\Phi_\alpha\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\varepsilon_{,j}\ n_j\right\}d\Gamma=0 \quad \cdots\cdots(15)$$

(13)～(14) 式のような弱形式を用いるのは，元の微分方程式をそのまま解くよりも導関数の次数の低い弱形式の方が数値計算上の精度において良好な解を与えるからである。また，各項の積分は数値積分により容易に得られるがペナルティー項（(13)式左辺第 2 項中の $\lambda\Phi_{\alpha,i}\ \Phi_{\beta,j}$）の積分に対しては locking 現象をさけるために他の項の積分より 1 次少ないいわゆる次数低減積分（reduced integration）を行う必要がある。このことに関しては 4. で詳述する。また，境界条件は Dirichlet 型境界条件かあるいは Neumann 型境界条件を与えるのが一般的であるが，固定壁面での no-slip の条件をそのまま与えるのは実用的ではない。そのため，境界層内部のある面を仮想壁面とした境界条件を設定する。速度は壁面近傍で対数則を適用し次式で与える。

$$u=u_*\left(\frac{1}{\varkappa}\ ln\frac{u_* z}{\nu}+A_s\right) \quad \cdots\cdots(16)$$

ここに u_* は摩擦速度 $\varkappa$ はカルマン常数，A_s は壁面の状態で決まる常数で滑面では 5.5。k，ε の境界条件に対しては，対数則，局所等方性の仮定，プラントル・コルモゴロフの法則などから次式で与える[25]。

$$k=\frac{u_*^2}{C_\mu^{\frac{1}{2}}} \quad \cdots\cdots(17)$$

$$\varepsilon=\frac{u_*^3}{\varkappa z} \quad \cdots\cdots(18)$$

ここに u_* は摩擦速度，$\varkappa$ はカルマン常数，C_μ は定数，z は壁面からの法線方向の長さである。

また 0 以外の Neumann 型境界条件が与えられる場合は基本式の境界積分項の数値積分が必要となる。

3. 有限要素方程式の解法

基礎式（1）～（4）の境界値問題は結局（13)～(15) 式の重みつき残差方程式の残差を最小にする制約のない非線形最適化問題（nonlinear optimization problem）を解く問題に帰着される。したがって残差を目的関数として反復法によって最適解を求めることになる。設計変数を $\boldsymbol{X}$（未知変数 u_i，k，ε をまとめて $\boldsymbol{X}$ とする）とし，刻み幅を α，方向ベクトルを $\boldsymbol{d}$ とすると計算ステップ（$n+1$）での設計変数 $\boldsymbol{X}$ の最適解は次式で表される。

$$\boldsymbol{X}^{(n+1)}=\boldsymbol{X}^{(n)}+\alpha^{(n)}\ \boldsymbol{d}^{(n)} \quad \cdots\cdots(19)$$

ここで方向ベクトル $\boldsymbol{d}^{(n)}$ はたとえば Newton 法によって得られる降下ベクトルを用いればよい。すなわち目的関数を $\boldsymbol{f}^{(n)}(\boldsymbol{X})$ とすると $\boldsymbol{d}^{(n)}$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{d}^{(n)}=-[\boldsymbol{J}^{(n)}]^{-1}\ \boldsymbol{f}^{(n)}(\boldsymbol{X}) \quad \cdots\cdots(20)$$

ここに $[\boldsymbol{J}^{(n)}]$ は (13)～(15) 式のヤコビアンマトリクスである。また $\alpha^{(n)}$ は目的関数が最小となるように定める 1 次元探索（unidimensional search）などを用いればよい。ところが $[\boldsymbol{J}^{(n)}]$ はマトリクスのサイズが大きく（たとえば 3 次元領域で u_i，k，ε の未知節点がすべて 500 とするとサイズは 2500×2500 となる），かつ u_i と k，ε のオーダーがかなり違うために行列の性質が非常に悪くなり，$[\boldsymbol{J}^{(n)}]^{-1}$ がうまく求まらないことが多い。そのために（13）式と（14)，(15）式を分けて交互に収束計算させて定常解を求める partitioning method[24),25),26)] を用いる。すなわちまず初期値(ここでは u_i に対しては stokes 流れの解，k,ε に対しては既往の研究を参考にして妥当なオーダーを与える）を与え速度の第 1 近似値 $u_i^{(1)}$ を Newton 法によって求める。すなわち，速度 u_i の未知数全体をベクトル $\boldsymbol{u}$ で表すと，新しい速度の近似値 $\boldsymbol{u}'$ は，

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}-[\boldsymbol{J_u}]^{-1}\boldsymbol{R}(u) \quad \cdots\cdots(21)$$

となる。ここに，ヤコビアンマトリクス $[\boldsymbol{J_u}]$ の成分は，たとえば要素 e において，

$$\frac{\partial R(u)}{\partial u_j}=\int_{\Omega e}(\Phi_\alpha\ u_j\ \Phi_{\beta,j}\ \delta_{ij}+\Phi_\alpha\ \Phi_\beta\ u_{i,j})d\Omega$$

$$+\int_{\Omega e}(\lambda\Phi_{\alpha,i}\ \Phi_{\beta,j})d\Omega$$

$$+\int_{\Omega e}\{(\nu+\nu_t)(\Phi_{\alpha,j}\ \Phi_{\beta,i}$$

$$+\Phi_{\alpha,k}\ \Phi_{\beta,k}\ \delta_{ij})\}d\Omega \quad \cdots\cdots(22)$$

となり，上式を全領域 Ω で重ね合わせたものが $[\boldsymbol{J_u}]$ となる。次に，(21）式の反復計算で求めた速度を $\boldsymbol{u}^{(1)}$ として，その $\boldsymbol{u}^{(1)}$ に対して乱流エネルギー，エネルギー逸散率の第 1 近似値 $\boldsymbol{k}^{(1)}$，$\varepsilon^{(1)}$ を次式の修正 Newton 法により求める。すなわち，(14)，(15）式のヤコビアンマトリクスを $[\boldsymbol{J_{k\varepsilon}}]$，刻み幅を α，反復により修正された新しい値を k'，ε'，(14)，(15) 式の残差 $R(k)$，$R(\varepsilon)$ の未知数全体のベクトルを $\boldsymbol{R}(k)$，$\boldsymbol{R}(\varepsilon)$ とすると

$$\begin{Bmatrix} k' \\ \varepsilon' \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} k \\ \varepsilon \end{Bmatrix}-\alpha[\boldsymbol{J_{k\varepsilon}}]^{-1}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{R}(k) \\ \boldsymbol{R}(\varepsilon) \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(23)$$

となる。ここに．ヤコビアンマトリクス $[\boldsymbol{J_{k\varepsilon}}]$ の成分は，たとえば要素 e では次式となる。

$$\frac{\partial R(k)}{\partial k}=\int_{\Omega e}\left\{\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\Phi_{\alpha,j}\ \Phi_{\beta,j}\right\}d\Omega$$

$$+\int_{\Omega e}(\Phi_\alpha\ u_j\ \Phi_{\gamma,j})d\Omega$$

$$-\int_{\Omega e}\left(2C_\mu\frac{k}{\varepsilon}S\Phi_\alpha\,\Phi_\beta\right)d\Omega$$

$$+\int_{\Omega e}\left(2\frac{C_\mu}{\sigma_k}\,\frac{k}{\varepsilon}\,\Phi_\alpha\,k_{,J}\,\Phi_{\beta,J}\right)d\Omega \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$\frac{\partial R(k)}{\partial\varepsilon}=\int_{\Omega e}(\Phi_\alpha\,\Phi_\beta)d\Omega+\int_{\Omega e}\left(C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon^2}S\Phi_\alpha\,\Phi_\beta\right)d\Omega$$

$$-\int_{\Omega e}\left(\frac{C_\mu}{\sigma_k}\frac{k^2}{\varepsilon^2}\,\Phi_\alpha\,k_{,J}\,\Phi_{\beta,J}\right)d\Omega \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\frac{\partial R(\varepsilon)}{\partial k}=-\int_{\Omega e}\left\{\left(C_{D1}\,C_\mu S+C_{D2}\frac{\varepsilon^2}{k^2}\right)\Phi_\alpha\,\Phi_\beta\right\}d\Omega$$

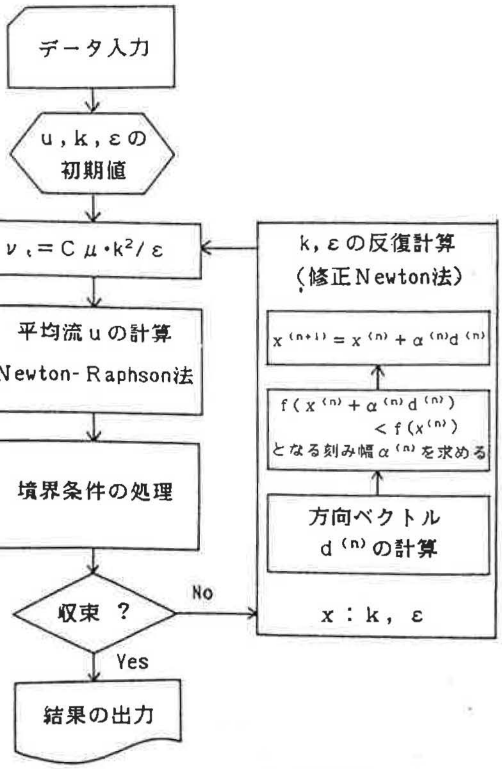
$$+\int_{\Omega e}\left(2\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon}\frac{k}{\varepsilon}\,\Phi_\alpha\,\varepsilon_{,J}\,\Phi_{\beta,J}\right)d\Omega \cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

$$\frac{\partial R(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=\int_{\Omega e}(\Phi_\alpha\,u_J\,\Phi_{\tau,J})d\Omega+\int_{\Omega e}\left(C_{D2}\frac{2\varepsilon}{k}\,\Phi_\alpha\,\Phi_\beta\right)d\Omega$$

$$-\int_{\Omega e}\left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon^2}\,\Phi_\alpha\,\varepsilon_{,J}\,\Phi_{\beta,J}\right)d\Omega$$

$$+\int_{\Omega e}\left\{\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\Phi_{\alpha,J}\,\Phi_{\beta,J}\right\}d\Omega \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

(24)～(27) 式を全領域 Ω で重ね合わせることにより $[J_{k\varepsilon}]$ が得られる。なお，(22) 式および (24)～(27) 式中には，変数 u，k，ε 等が含まれるが，これには前回のステップ時の値を用いて定数として扱う。また刻み幅 α の決定には，特別な注意を要する。すなわち，k，ε の修正値が非物理的な負の値になってしまうと解は急速に発散してしまう。したがって k，ε の設計変数が負にならない範囲で目的関数（この場合 $R(k)$，$R(\varepsilon)$）が小さくなる方向に刻み幅 α を調節してやる必要がある。このようにして (23) 式の反復計算から乱流エネルギー，エネルギー逸散率の第 1 近似値 $k^{(1)}$，$\varepsilon^{(1)}$ を求める。次に $k^{(1)}$，$\varepsilon^{(1)}$ を基に速度の第 2 近似値 $u^{(2)}$ を求める。以下同様にして，全体が収束するまで繰り返して最終的な定常解を求める。



図—1 解法のフローチャート

また，圧力を求めるには，たとえば速度に 1 次あるいは双 1 次の要素を用い，ペナルティー項（(13) 式中の左辺第 2 項の $\lambda\Phi_{\alpha,i}\,\Phi_{\beta,J}$）の積分に対して次数低減積分を用いる場合，(7) 式から要素 e の圧力 $p^{(e)}$ を次式で求める。

$$p^{(e)}=-\lambda\,u^{(e)}_{J,J}\big|_{\xi=\eta=\zeta=0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

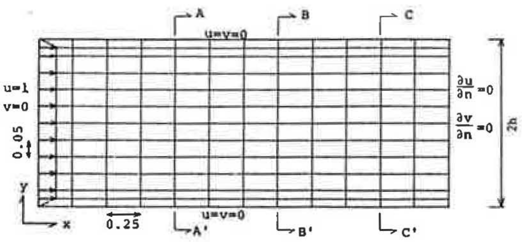
ここに，ξ，η，ζ は局所座標系の座標を表す。解法のフローチャートの概要を図—1 に示す。

4. 有限要素解の精度と安定性

Navier-Stokes 方程式の有限要素解の精度については，たとえば Jamet and Raviart[27] によれば，primitive variable の誤差ノルムの要素寸法を h，基底関数の次数を m とすると，h^m に比例することが分っている。したがって解の精度を上げるには要素分割を多くし，高次要素を採用すればよいわけである。実際に精度良く安定な解の得られる要素分割については，経験的に差分法とほぼ同程度のメッシュレイノルズ数（R_m=20）以下であればよいと考えられる。

一方ペナルティー有限要素法では非圧縮性の条件をペナルティー関数を用いてゆるめているために，ペナルティー乗数 λ の誤差に与える影響も大きいと考えられる。以下ペナルティー乗数の有限要素解に与える影響について調べる。

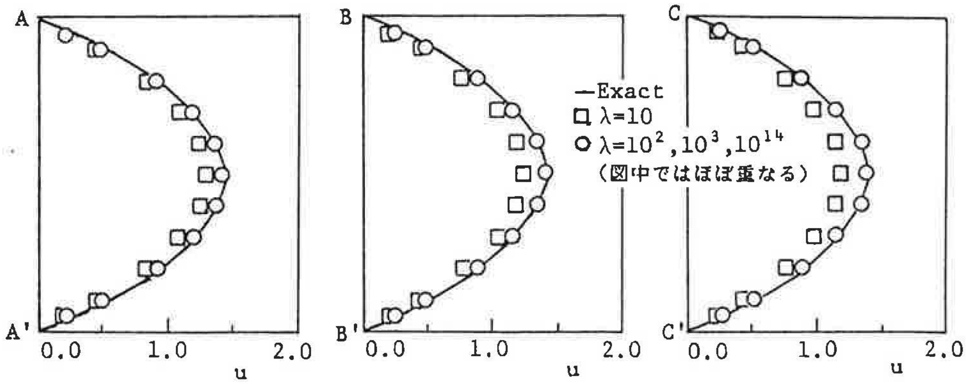
圧力にペナルティー関数を用いた Navier-Stokes 方程式に対する有限要素方程式は形式的にマトリクスの形で表すと次式となる。



図—2 Poiseuille flow 計算モデル

表—1 各断面における流量

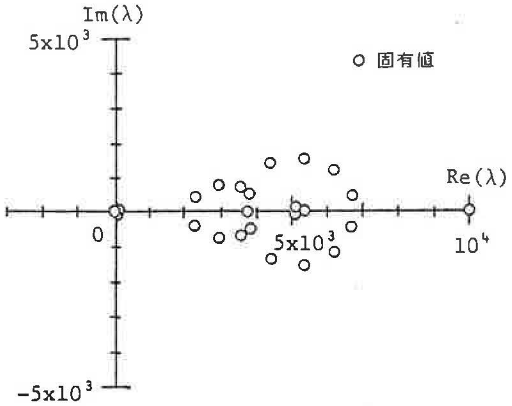
ペナルティー乗数 ＼ 断面	A－A'	B－B'	C－C'
$\lambda=10$	0.428	0.406	0.394
$\lambda=10^2$	0.469	0.467	0.465
$\lambda=10^3$	0.474	0.474	0.474
$\lambda=10$[illegible]	0.475	0.475	0.475



図—3　ペナルティ乗数の違いによる速度分布の比較

表—2　ペナルティー乗数による条件数の変化

λ	1語長 有効桁数	各反復ステップにおける p 条件数 1	2	3	4	最大固有値
10	38bit	1.7×10^{6}	1.5×10^{6}	—	—	1.0×10^{2}
10^{2}	7桁	3.3×10^{8}	3.5×10^{8}	—	—	1.0×10^{3}
10^{3}		3.5×10^{12}	5.5×10^{11}	5.5×10^{11}	—	1.0×10^{4}
10^{14}	72bit 18桁	1.2×10^{34}	3.9×10^{35}	2.7×10^{36}	2.0×10^{37}	1.0×10^{15}



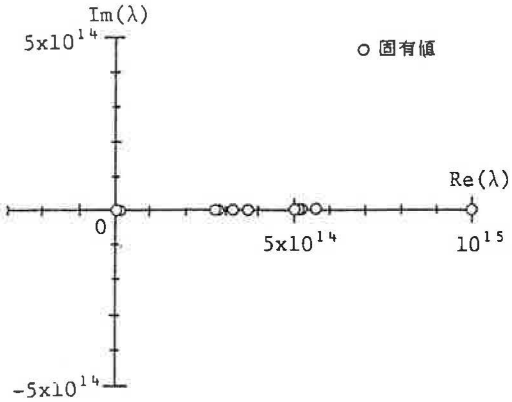
図—4　$\lambda=10^3$（単精度）における $[K]$ の固有値の分布

$$([K_1]+\lambda[K_2])\{u\}+\{F\}=\{0\} \quad \cdots\cdots(29)$$

λ を十分大きな値とすると上式は近似的に次式となる。

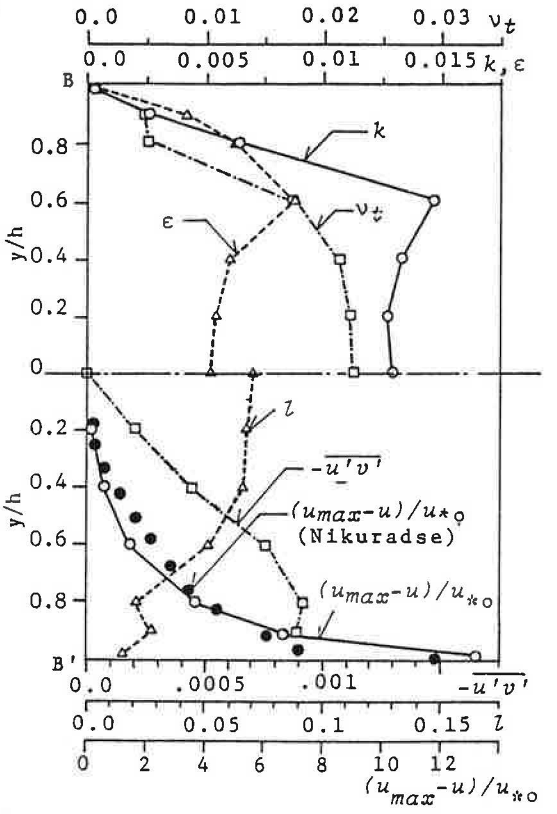
$$[K_2]\{u\}=-\frac{1}{\lambda}\{F\}\rightarrow\{0\} \quad \cdots\cdots(30)$$

ここで $[K_2]$ が非特異であれば $\{u\}=\{0\}$ となり，いわゆる locking 現象を起こしてしまう。したがって $\{u\}\neq\{0\}$ とするためには $[K_2]$ は特異でなければならない（正確には不定)。それには $[K_2]$ を $[K_1]$ で用いた数値積分の積分点の次数より 1 次少ない次数で積分（次数低減積分）すればよいことが知られている[27]。また（29）式が意味のある解をもつためには λ の増加とともに $[K_1]$ の情報が失なわれないように，有限桁計算の行われる電算機による係数マトリクス $[K_1]+\lambda[K_2]$ の桁落ちに伴うマトリクスの性質の悪化を防ぐ必要がある。これにはペナルティー乗数 λ と計算機の 1 語長とが関係する。以下ペナルティー有限要素解の精度を調べるために，2 次元 Poiseuille 流れに対して $\lambda=10$, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5（単精度 36 bit)，$\lambda=10^{14}$（倍精度 72 bit）について速度の計算値と厳密解を比較した。またスキームの安定性を係数マトリクスの性質を調べることによって考察する。計算モデルおよび境界条件を図—2 に示す。図—3 に A-A', B-B', C-C' 断面の速度プロフィールを示す。$\lambda=10$ では約 17 % の誤差があるが，10^2, 10^3, 10^{14} では 2.1 % 以下と良い一致を示し，$\lambda=10^5$ では発散した。また表—1 に各断面における流量を示す。$\lambda=10$, 10^2 ではやや流量が減少し圧縮性の傾向が見られるが 10^3 以上ではほぼ非圧縮性の条件を満たしていると考えられる。



図—5　$\lambda=10^{14}$（倍精度）における $[K]$ の固有値の分布

次に係数マトリクスの性質を表す指標の一つである p 条件数（$|$最大固有値 $\lambda_{max}|/|$最小固有値 $\lambda_{min}|$）を表 2 に示す。λ の増加とともに最大固有値 λ_{max} は λ に比例し，最小固有値 λ_{min} は係数マトリクスが特異になっていくために絶対値が 0 に近づく。したがって p 条件数は λ の増加とともに加速度的に増大する。各反復ステップにおける条件数には大きな変化は見られない。また λ



図—6　速度分布および乱流量の分布（$B-B'$ 断面）

$=10^3$ と 10^{14} における固有値の分布を図—4, 5 に示す。固有値は実部がすべて正で，実軸に対して対称となっており $\lambda=10^{14}$ ではほぼ実軸上に分布しているがほとんどは原点 0 の近辺に分布している。Hughes ら[29]はペナルティー乗数の推奨値として 1 語長 60～64 ビットの計算機に対して次式を与えている。

$$\lambda=10^7\max(\mu,\ \mu R_e) \cdots\cdots (31)$$

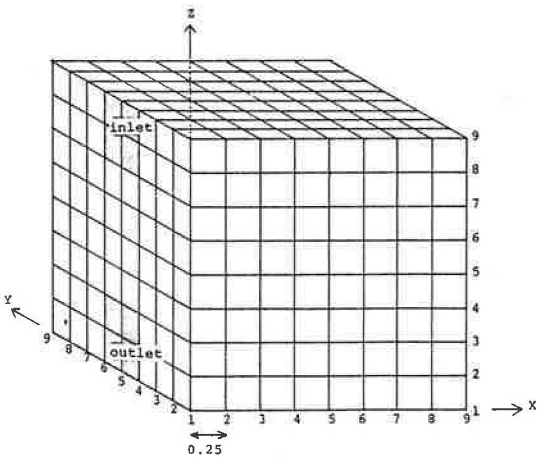
ここに μ は粘性係数，R_e はレイノルズ数である。

Hughes[29] らも指摘しているように，この λ はある程度オーダー的に幅があるようである。λ を発散しない範囲で大きくすれば精度は向上するが収束に時間がかかる傾向にあり，解析対象により調整する必要があると考えられる。

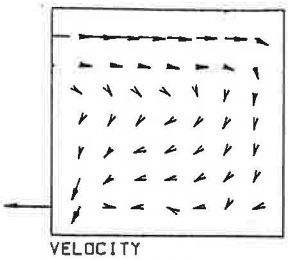
次に同じ計算モデルを用いて $k-\varepsilon$ モデルの有限要素解の精度について検討する。境界条件は流入口において無次元量（代表速度，代表長さで基準化した）で $u=1.0$, $v=0.0$, $k=0.04$, $\varepsilon=0.008$, $R_e=10^5$, 流出口において $\partial u/\partial n=\partial v/\partial n=0$, $\partial k/\partial n=\partial\varepsilon/\partial n=0$, その他の壁面上では (16), (17), (18) 式を与えた。ここで，境界層理論の適用範囲は壁面に接する要素のみとした。図—6 に平均流速 $\overline{u}$ および各種乱流量の $B-B'$ 断面における分布を示す。$\overline{u}$ は Nikuradse[30] の実測値に比べ壁面近傍でやや大きく，壁面から離れた所ではやや小さく計算された。また，その他の乱流量に対しては直接比較するデータは見当らないが，管内乱流の実測値（たとえば Schlichting[31] や Laufer[32] など）と比較すると，混合長さ $l(=\nu_t/k^{\frac{1}{2}})$ およびレイノルズ応力 $-\overline{u'v'}(=\nu_t|\partial\overline{u}/\partial y|)$ のオーダーはほぼ一致し，分布の傾向も良く似た結果になっている。なお，$R_e=10^7$ とした計算も行ったが速度分布にほとんど差はなかった。以上の結果から本手法は，速度分布に関しては十分な精度を持ち，乱流量に関してはさらに詳細な検討を要するが，乱流の特性も比較的良く解析できるものと考えられる。

5. 室内空気分布の数値計算例

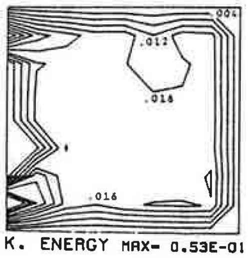
ペナルティー有限要素法による 2 方程式モデルを用い



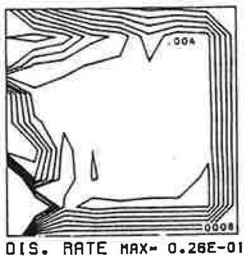
図—7　3 次元計算モデル



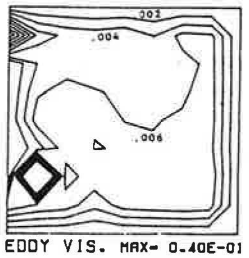
図—8　速度ベクトル（$X-Z$ 平面，$Y=5$）



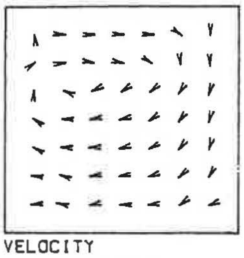
図—9　乱流エネルギー k（$X-Z$ 平面，$Y=5$）



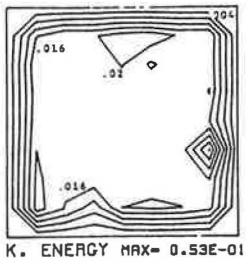
図—10　エネルギー逸散率 ε（$X-Z$ 平面，$Y=5$）



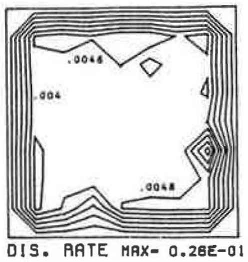
図—11　渦動粘性係数 ν_t（$X-Z$ 平面，$Y=5$）



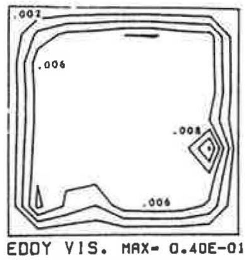
図—12　速度ベクトル
（$X-Z$ 平面，$Y=7$）



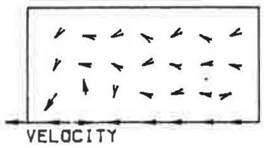
図—13　乱流エネルギー k
（$X-Z$ 平面，$Y=7$）



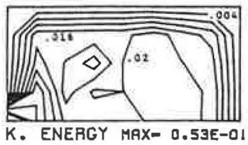
図—14　エネルギー逸散率 ε
（$X-Z$ 平面，$Y=7$）



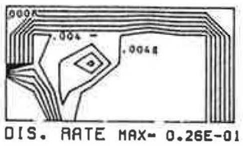
図—15　渦動粘性係数 ν_t
（$X-Z$ 平面，$Y=7$）



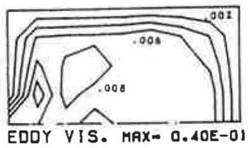
図—16　速度ベクトル
（$X-Y$ 平面，$Z=2$）



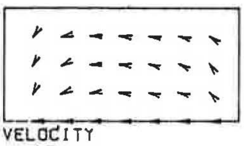
図—17　乱流エネルギー k
（$X-Y$ 平面，$Z=2$）



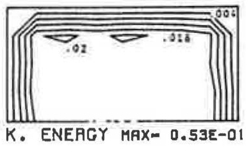
図—18　エネルギー逸散率 ε
（$X-Y$ 平面，$Z=2$）



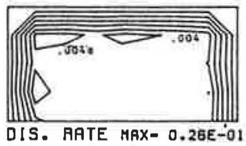
図—19　渦動粘性係数 ν_t
（$X-Y$ 平面，$Z=2$）



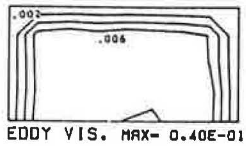
図—20　速度ベクトル
（$X-Y$ 平面，$Z=5$）



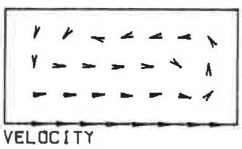
図—21　乱流エネルギー k
（$X-Y$ 平面，$Z=5$）



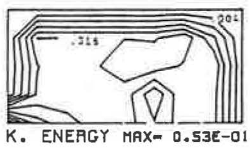
図—22　エネルギー逸散率 ε
（$X-Y$ 平面，$Z=5$）



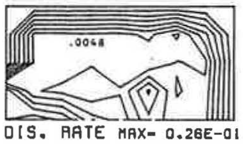
図—23　渦動粘性係数 ν_t
（$X-Y$ 平面，$Z=5$）



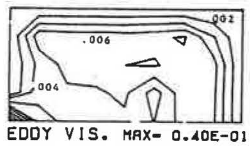
図—24　速度ベクトル
（$X-Y$ 平面，$Z=8$）



図—25　乱流エネルギー k
（$X-Y$ 平面，$Z=8$）



図—26　エネルギー逸散率 ε
（$X-Y$ 平面，$Z=8$）



図—27　渦動粘性係数 ν_t
（$X-Y$ 平面，$Z=8$）

た室内空気の数値計算例を示す。計算モデルは図—7 に示すような 3 次元モデルで，要素には 8 節点六面体のアイソパラメトリック 3 次元要素を用いて領域を 512 要素（729 節点）に分割した（実際の計算では対称面で分割した $\frac{1}{2}$ の領域を用いた）。境界条件は吹出し口で $R_e=10^5$, $u=1.0$, $v=w=0.0$, $k=0.04$, $\varepsilon=0.008$（すべて無次元量），吸込み口で $\partial u/\partial n=\partial v/\partial n=\partial w/\partial n=0.0$, $\partial k/\partial n=\partial\varepsilon/\partial n=0.0$ とした。また対称面では $v=0.0$, $\partial u/\partial n=\partial w/\partial n=0.0$, $\partial k/\partial n=\partial\varepsilon/\partial n=0.0$ とした。有限要素の数値積分はペナルティー項で 1 点積分，その他の項では 2×2×2 点積分とした。初期値は速度 $\boldsymbol{u}$ に対しては Stokes 流れの解，k, ε に対しては一定値（それぞれ 0.02, 0.005）を与えた。実際の収束計算は各反復ステップ時においてややゆるい収束判定とし全反復回数 22 回で打ち切った（このときの誤差ノルムの 2 乗は $\boldsymbol{u}$ が 2×10^{-3}, k, ε が 10^{-6}）。演算時間は ACOS 1000（推定約 60 MIPS）を用いて約 27 分であった。図—8～27 に各断面における速度ベクトル $\boldsymbol{u}$，乱流エネルギー k，エネルギー逸散率 ε の分布を示す。分割が粗いために吸込み口付近で速度の乱れや，k，ε の特異点が若干見られるが，全体的に 3 次元的な流れの特徴を良く表していると考えられる。

6. 結　び

本論文は有限要素法による室内空気分布の数値解析手法について述べたものであり，精度良く定安な計算のできる解法のアルゴリズムや条件について検討した。また 3 次元の室内気流計算を行ない妥当な結果が得られることを確認した。

今後の課題としては，（1）演算時間短縮のためにベクトル計算を含むアルゴリズムの改良や差分法の長所を取り入れた解析手法の導入，（2）非線形方程式の反復計算のための初期値の一般的な設定の仕方，（3）ペナルティー関数を見かけ上消しているために圧力境界条件の取り扱いをどうするかなどが挙げられる。また，本論文では定常計算法のみを扱ったが，適当な時間積分スキームを用いれば，定常計算と同様に非定常計算も可能

であろう。

なお，本研究の一部は昭和 58 年度文部省科学研究費に依るものである。記して感謝の意を表します。

参考文献

1) 野村 豪，松尾 陽，貝塚正光，坂本雄三，遠藤清尊：室内空気分布の数値解法に関する研究・3，日本建築学会論文報告集，238 号，昭和 50 年
2) P.V. Nielsen : Prediction of Air Flow and Comfort in Air Conditioned Spaces, ASHRAE Trans., 1975
3) 浦野良美，山崎 均，西田 勝，渡辺俊行，三木信博：二次元流れの数値解と可視化実験，日本建築学会論文報告集，240 号，昭和 51 年
4) 吉川 暉，山口克人，井上義雄，米山和広：室内気流の数値解析 第 5 報，空気調和衛生工学会論文集，No. 6, 1978
5), 6) 土屋喬雄：Numerical Calculation of Room Air Movement-Isothermal Turbulent Two-Dimensional Case(Part 1), (Part 2), 日本建築学会論文報告集, 263 号, 264 号，昭和 53 年
7) 絵内正道：拡散係数を変数とする室内熱対流解析，日本建築学会論文報告集，270 号，昭和 53 年
8) 野村 豪，村上周三，加藤信介，佐藤正章：数値解析手法を用いる室内空気分布予測法に関する研究その 2，日本建築学会論文報告集，298 号，昭和 55 年
9) 村上周三，田中俊彦：室内濃度分布の数値計算と模型実験の比較，日本建築学会環境工学論文集，昭和 57 年
10) 海野建一，長沢佳明，半澤 久，高橋紀行，田島秀樹：室内気流の数値解析に関する研究 その 1，竹中技研報告，27 号，昭和 57 年
11) 寺井俊夫，平岡久司：有限要素法による室内気流の数値計算，日本建築学会近畿支部研究報告集，昭和 51 年
12) 石田義洋，栗岡 均：MAC 法と有限要素法を組合わせた 2 次元流れ解析法 その 1，日本建築学会大会梗概集，昭和 57 年
13), 14) 長谷川房雄，松本 博，内海康雄：室内空気濃度分布の予測に関する研究 その 2，その 4，日本建築学会大会梗概集，昭和 58 年，日本建築学会東北支部研究報告集，昭和 59 年
15) B. E. Launder and D.B. Spalding : The Numerical Computation of Turbulent Flows, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, 1974
16) B.A. Finlayson : The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972
17) 菊池 昇：流体解析の数学的基礎，数理科学，No. 236, 1983
18) R. T. Cheng : Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations by the Finite Element Method, Phys. Fluid, Vol. 15, No. 12, 1972
19) M. D. Olson : Variational-finite Element Method for Two Dimensional and Axisymmetric Navier-Stokes Equations, Finite Element Method in Flow Problems, UAH press, 1974
20) T. J. R. Hughes, R. L. Taylor and J. F. Levy : A Finite Element Method for Imcompressible Viscous Flow, Finite Element Method in Flow Problems, I. C. C. A. D., 1976
21) 水上 昭：乗数法による定常非圧縮粘性流れ問題の有限要素解析，第 4 回流れの有限要素解析シンポジウム，昭和 58 年
22) R. Teman : Navier Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam, 1977
23) J. N. Reddy : On Penalty Function Methods in the Finite Element Analysis of Flow Problems, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 2, 1982
24) B. D. R. Schanber and B. E. Larock : Numerical Analysis of Flow Sedimentation Basins, Hydraulics Division, ASCE, Vol. 107, HY 5, 1981
25) B. A. Devantier and B. E. Larock : Computation of Coupled Turbulent Flow and Sediment Transport, Proceeding of 4 th International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems, 1982
26) G. D. Tong : A Treatment of Wall Boundaries for($k-\varepsilon$) Turbnlent Modelling within An Integral (Finite Element) Formulation, Proceedirgs of 4th International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems, 1982
27) P. Jamet and P. A. Raviart : Numerical Solution of Stationary Navier-Stokes Equation by Finite Element Method, Computing Methods in Applied Science Lecture Notes on Computer Science, Dec. (3), Sprirger-Verlag, 1974
28) O. C. Zienkiewicz : Finite Element Method, McGraw Hill, 1977
29) T. J. R. Hughes, W. K. Liu and A. Brooks : Finite Element Analysis of Imcompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation, Journal of Comp. Physics, 30, 1979
30) J. Nikuradse : Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in Korrergenten und Divergenten Kanälen, Forshungen-sarbeiten of the VDI, No. 289, 1929
31) H. Schlichting : Boundary-Layer Theory 6-th Edition, McGraw-Hill, 1968
32) J. Laufer : The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow, NACA TR 1174, 1954

SYNOPSIS

UDC : 628. 86

NUMERICAL ANALYSIS OF ROOM AIR DISTRIBUTION BY THE FINITE ELEMENT METHOD

by Dr. **HIROSHI MATSUMOTO**, Research Associate of Tohoku Univ., Dr. **FUSAO HASEGAWA**, Prof. of Tohoku Institute of Technology, and Dr. **YASUO UTSUMI**, Research Associate, Miyagi National College of Technology, Members of A. I. J.

This paper describes the numerical analysis of room air distribution by the finite element method which can easily deal with any domain, the boundary conditions and so on. The two-equation model of turbulence ($k-\varepsilon$ model) is applied to the governing equations of room air, and the discretization of the basic equations is formulated by the penalty finite element method, which ~~results in the replacement of~~ the equation of continuity by $u_{i,i} = -\lambda^{-1} p$ where $\lambda \gg 1$ is the penalty parameter. The finite element equations are solved by the partitioning method that the equations are partitioned into the momentum equation of the mean flow and the transport equations for turbulence kinetic energy k and that for turbulence energy dissipation rate ε, and the modified Newton method is employed in the iterative procedure.

The accuracy and the stability of the scheme by the influence of the penalty parameter are examined for the two dimensional Poiseuille flow. Though the accuracy of the solutions is improved as the penalty parameter is increased, the large parameter makes the condition of the coefficient matrix ill and the numerical convergence is hard to be obtained for the computer. In this computational experiments the scheme has good accuracy. ~~even when $\lambda=10^3$~~. At last the numerical example of the three dimensional room model is carried out and the solutions are confirmed to be fully sufficient. As a result, the finite element method is effective for the prediction of the room air distribution.